MATEMÁTICA A - 12º Ano
Probabilidades - Demonstrações

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$

   Prove que $P\left(A \cup \overline{B}\right) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$

   Exame – 2015, 2ª Fase

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

   Sabe-se que:

   - A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis;
   - A e B são acontecimentos independentes.

   Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

   Exame – 2014, Ép. especial

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
   Sabe-se que:

   - A e B são incompatíveis;
   - $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$

   Mostre que as probabilidades $P(A)$, $P(A|B)$ e $P\left(\overline{B}|A\right)$ são todas diferentes e escreva-as por ordem crescente.

   Teste Intermédio 12º ano – 29.11.2013

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
   Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então

   $$P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A}\right) \times \Big(1 - P(B)\Big) = P\left(\overline{A}\right)$$

   Exame – 2012, Ép. especial

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) \neq 0$

   Mostre que $P\left(\overline{A \cap B}|B\right) + P(A|B) = 1$

   Exame – 2012, 2ª Fase

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$ e, com $P(B) \neq 0$

   Mostre que $P\left(\overline{A \cap B}|B\right) = P(\overline{A}|B)$

   Exame – 2011, Ép. especial

7. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$

   Mostre que $P(B|A) \geq 1 - \dfrac{1 - P(B)}{P(A)}$

Exame – 2011, 1ª Fase

8. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) ambos com probabilidade diferente de zero.

   Prove que $P(A \cup B) < P(A|B) \times P\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(A|B)$

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

9. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$

   Mostre que $\dfrac{P(A \cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$
   (P designa probabilidade; $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A; $P(A|B)$ designa a probabilidade de A, dado B)

Exame – 2010, 2ª Fase

10. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
    Sejam X e Y dois acontecimentos ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$) de probabilidade não nula.
    Prove que

$$P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = P(X) \times P(Y|X) + P\left(\overline{X}\right) - P(Y)$$

    (P designa probabilidade, $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ designam os acontecimentos contrários de X e de Y, respetivamente, e $P(Y|X)$ designa uma probabilidade condicionada).

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010

11. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
    Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$

    Prove que: $P(A) \times [P(B|A) - 1] + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)$
    Nota: $P(B|A)$ designa uma probabilidade condicionada.

Teste Intermédio 12º ano – 04.12.2009

12. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
    Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

    Mostre que $P(B) + P\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 2P\left(\overline{A}\right) + P(A \cup B)$.

    (P designa probabilidade e $\overline{A}$ designa acontecimento contrário de A.)

Exame – 2009, Ép. especial

13. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
    Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$.

    Mostre que $1 - P(A|B) \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)$
    (P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(A|B)$ designa a probabilidade de A dado B.)

Exame – 2009, 2ª Fase

14. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) de probabilidade não nula.
Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ designam probabilidades condicionadas.

Mostre que $P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$

Teste Intermédio 12º ano – 10.12.2008

15. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que $1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A|B) \times P(B) = P(A) + P(B)$
(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(A|B)$ designa a probabilidade de A dado B.)

Exame – 2008, Ép. especial

16. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que: $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A \cup B)$
(P designa a probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B.)

Exame – 2008, 2ª Fase

17. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula.
Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prove que

$$P\left(\left(\overline{\overline{A} \cap B}\right) | B\right) = P(A|B)$$

Teste Intermédio 12º ano – 17.01.2008

18. Considere um espaço de resultados finito, Ω, associado a uma certa experiência aleatória.
A propósito de dois acontecimentos X e Y ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$), sabe-se que,

- $P(X) = a$
- $P(Y) = b$
- X e Y são independentes.

Mostre que a probabilidade de que X não ocorra nem ocorra Y é igual a

$$1 - a - b + a \times b$$

Exame – 2007, 2ª Fase

19. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$.
Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os acontecimentos contrários de A e de B, respetivamente.
Seja $P(B|A)$ a probabilidade de B, se A.

Mostre que: $\dfrac{P\left(\overline{B}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P(A)} = 1 - P(B|A)$

Teste Intermédio 12º ano – 07.12.2005

20. Seja Ω um espaço de resultados finito, associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, mas não certos.

Prove que A e B são independentes se, e só se, $P(B|A) = P\left(B|\overline{A}\right)$.
(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(B|A)$ designa a probabilidade de B, se A).

Exame – 2004, Ép. especial

21. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Prove que

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B respetivamente, $P(A|B)$ designa a probabilidade de A, se B).

Exame – 2002, 1ª Fase – 1ª chamada

22. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam E_1 e E_2 dois acontecimentos possíveis ($E_1 \subset S$ e $E_2 \subset S$).

Prove que $P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right) = 1 - P(E_1) \times P(E_2|E_1)$
(P designa probabilidade, $\overline{E_1}$ e $\overline{E_2}$ designam os acontecimentos contrários de E_1 e de E_2 e $P(E_2|E_1)$ designa a probabilidade de E_2, se E_1).

Exame – 2000, 2ª Fase

23. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são portanto, subconjuntos de S).
Prove que

$$P(A) + P(B) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 + P(A \cap B)$$

(P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B.)

Prova modelo – 2000