

3

PLANO

O alfabeto do plano é o conjunto das posições genéricas que um plano pode ter em relação aos planos de projeção. Neste capítulo apresentam-se essas posições, assim como posições particulares que alguns planos podem ter. Mostra-se que retas podem existir em cada plano e como se marcam pontos nos planos. Ainda se apresentam modos diversos de definir os planos.

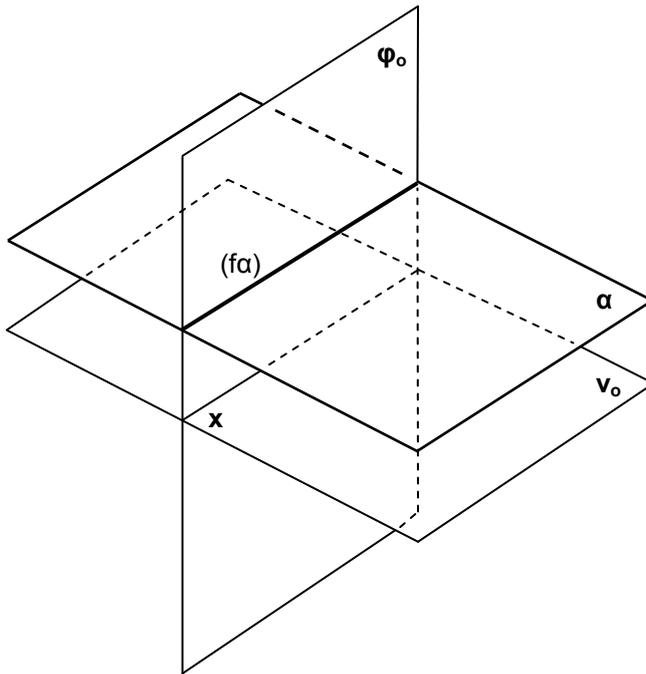
Sumário:

2. Plano horizontal
3. Plano frontal
4. Plano de topo
5. Plano vertical
6. Plano de perfil
7. Plano de rampa
8. Plano oblíquo
9. Posições particulares do plano oblíquo
10. Posições particulares do plano de rampa
- 11 e 12. O traço lateral do plano de rampa
13. O traço lateral dos planos frontal e horizontal
14. O traço lateral dos planos vertical, de topo e oblíquo
15. Marcação de pontos em planos projetantes
16. Marcação de pontos em planos não projetantes
17. Retas do plano horizontal
18. Retas do plano frontal
19. Retas do plano de topo
20. Retas do plano vertical
21. Retas do plano de perfil
22. Retas do plano de rampa
- 23 e 24. Retas do plano oblíquo
- 25 e 26. Plano definido por duas retas
27. Planos definidos por uma reta e um ponto
28. Planos definidos por três pontos
29. Planos definidos por uma reta e tipo
30. Planos definidos por pontos e tipo
31. Retas notáveis em planos definidos por retas
32. Retas dos planos bissetores em planos definidos por retas
- 33 e 34. Exercícios

Plano horizontal

O plano horizontal é paralelo ao plano horizontal de projeção e perpendicular ao plano frontal de projeção. Tem apenas traço frontal. Este plano é projetante frontal, uma vez que as figuras que ele pode conter ficam projetadas frontalmente no seu traço.

Designam-se por traços as retas onde os planos cruzam os planos de projeção.



$$\alpha \begin{cases} // \text{PHP} \\ \perp \text{PFP} \end{cases}$$

O plano horizontal em perspectiva

O plano α , por ser paralelo ao PHP, cruza apenas o PFP numa reta que é o seu traço frontal, designado por $(f\alpha)$. Por se tratar de um plano projetante apenas com um traço, este indica-se entre parêntesis.

$(f\alpha)$

x

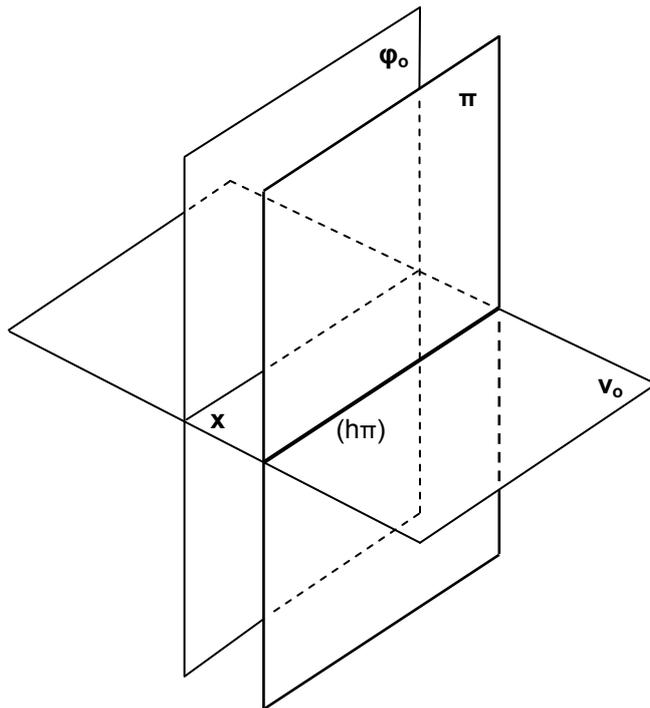
$(f\theta)$

O plano horizontal representado pelo seu traço

O plano α tem cota positiva e corresponde àquele que é mostrado em perspectiva. O plano θ tem cota negativa e está apenas representado nesta imagem. Um plano com cota nula ficará com o seu traço coincidente com o eixo x.

Plano frontal

O plano frontal é paralelo ao plano frontal de projeção e perpendicular ao plano horizontal de projeção. Tem apenas traço horizontal. Este plano é projetante horizontal, dado que as figuras que ele pode conter ficam projetadas horizontalmente no seu traço.



$$\pi \begin{cases} // \text{ PFP} \\ \perp \text{ PHP} \end{cases}$$

O plano frontal em perspectiva

O plano π , por ser paralelo ao PFP, cruza apenas o PHP, numa reta que é o seu traço horizontal, designado por $(h\pi)$. Por ser um plano projetante apenas com um traço, este indica-se entre parêntesis.

(hp)

x

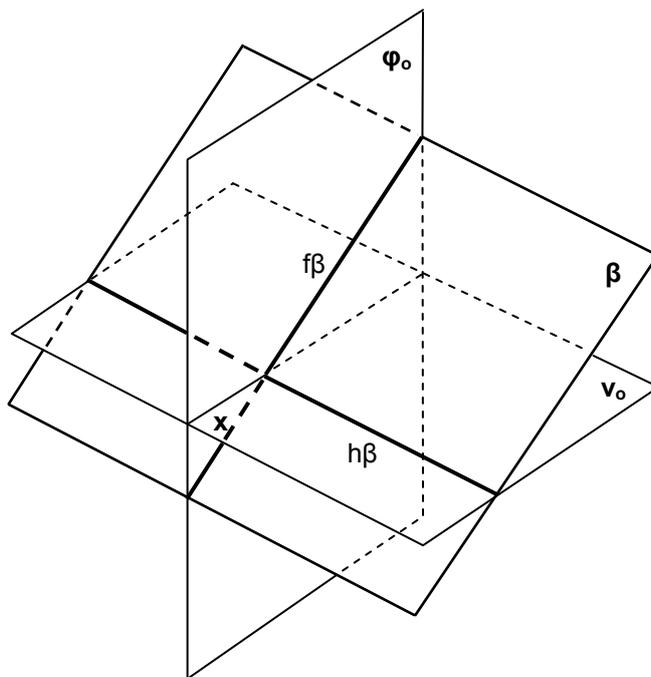
$(h\pi)$

O plano frontal representado pelo seu traço

O plano π tem afastamento positivo e corresponde àquele que é mostrado em perspectiva. O plano p tem afastamento negativo e está apenas representado nesta imagem. Um plano com afastamento nulo ficará com o seu traço coincidente com o eixo x .

Plano de topo

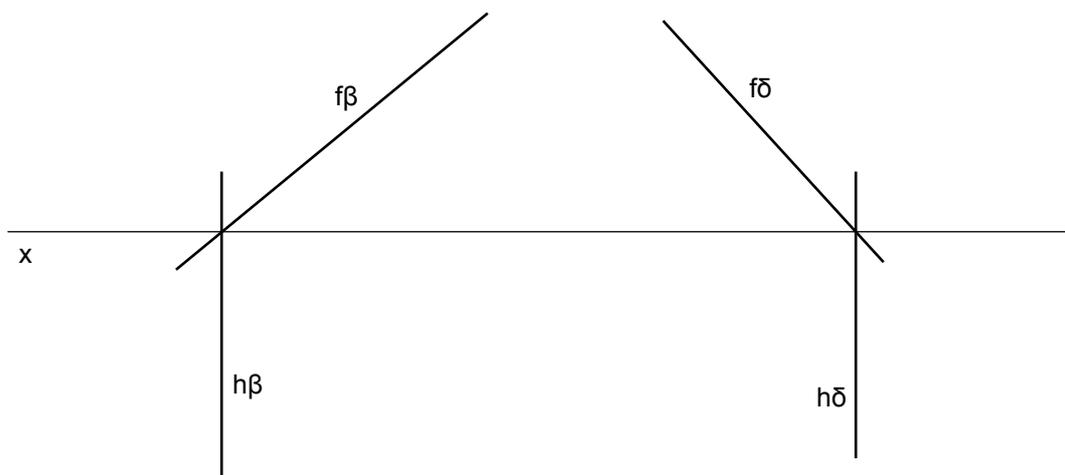
O plano de topo é perpendicular ao plano frontal de projeção e oblíquo ao plano horizontal de projeção. Tem dois traços. Este plano é projetante frontal, pois todas as figuras que nele existam ficam projetadas frontalmente no seu traço frontal.



$$\beta \begin{cases} \perp \text{ PHP} \\ \perp \text{ PFP} \end{cases}$$

O plano de topo em perspectiva

O plano β cruza o PFP em $f\beta$ e o PHP em $h\beta$. São esses os seus traços.

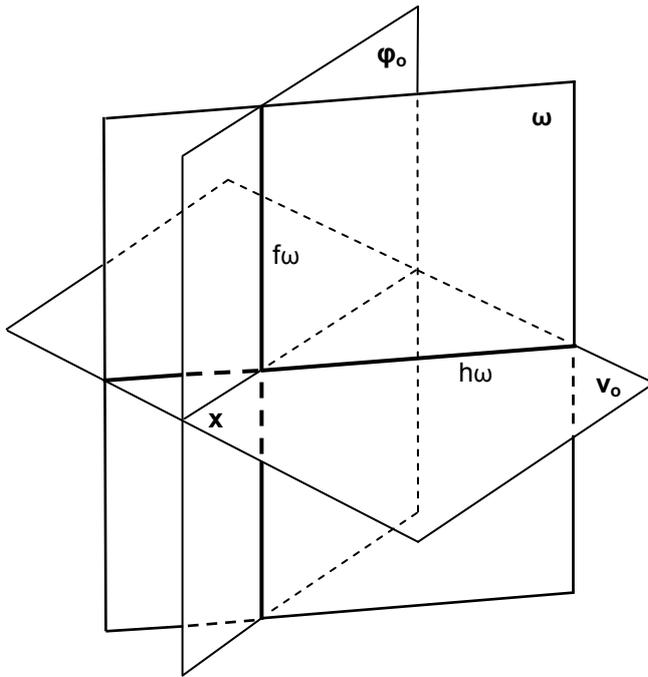


O plano de topo representado pelos seus traços

O plano β tem abertura para a direita e corresponde àquele que está representado em perspectiva. O plano δ tem abertura para a esquerda. São estas as duas variantes de um plano de topo. O traço frontal do plano de topo é oblíquo ao eixo x , o horizontal é perpendicular.

Plano vertical

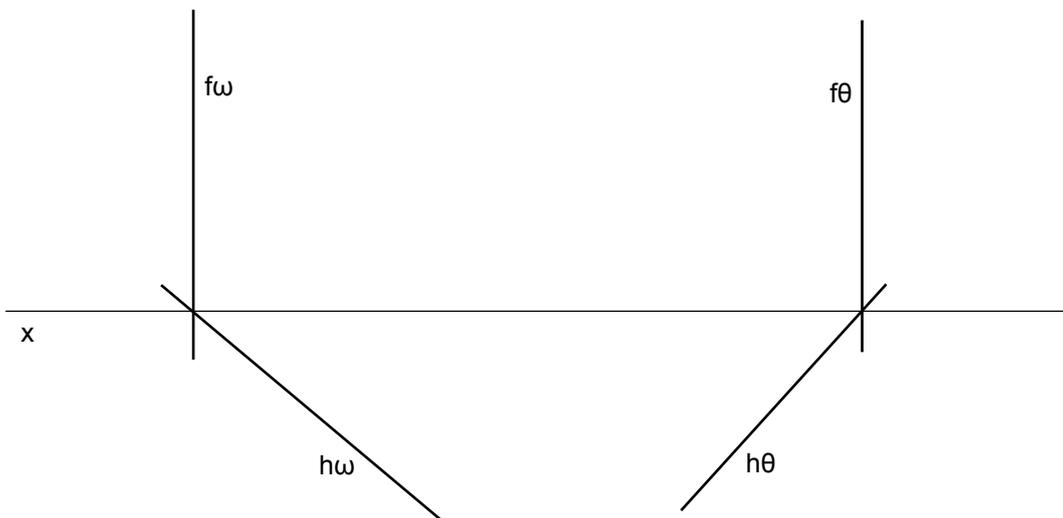
O plano vertical é oblíquo ao plano frontal de projeção e perpendicular ao plano horizontal de projeção. Tem dois traços. Este plano é projetante horizontal, já que todas as figuras que ele pode conter ficam projetadas horizontalmente no seu traço horizontal.



$$\omega \begin{cases} \perp \text{PFP} \\ \perp \text{PHP} \end{cases}$$

O plano vertical em perspectiva

O plano ω cruza o PHP em $h\omega$ e o PFP em $f\omega$. Essas retas são os seus traços.

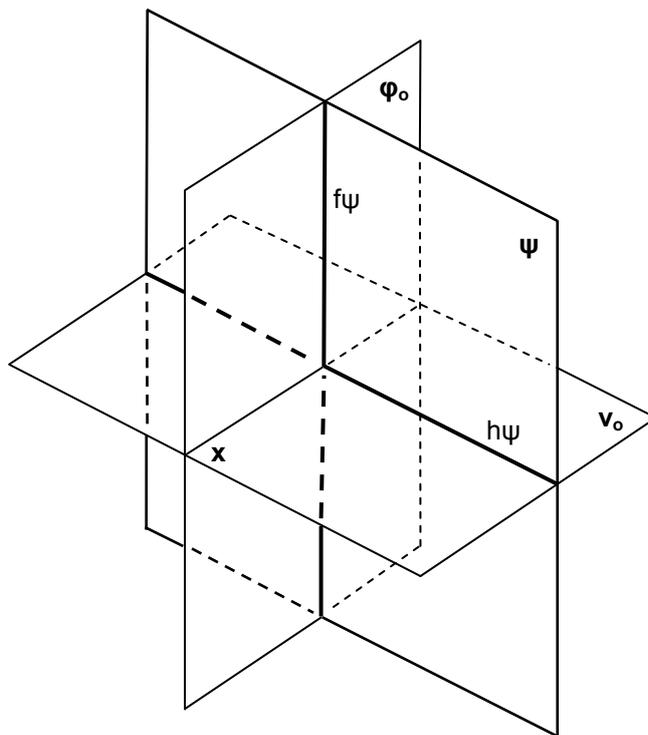


O plano vertical representado pelos seus traços

O plano ω tem abertura para a direita e corresponde àquele que está representado em perspectiva. O plano θ tem abertura para a esquerda. Estas são as duas variantes que um plano vertical pode ter. O traço frontal do plano vertical é perpendicular ao eixo x , o horizontal é oblíquo.

Plano de perfil

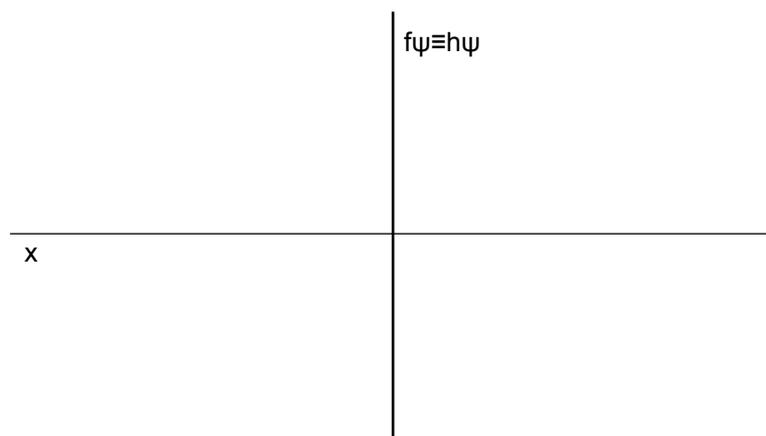
O plano de perfil é perpendicular aos dois planos de projeção. Tem dois traços. Este plano é duplamente projetante, o que significa que todas as figuras que nele estiverem contidas ficam projetadas em ambos os seus traços.



$$\psi \begin{cases} \perp \text{PHP} \\ \perp \text{PFP} \end{cases}$$

O plano de perfil em perspectiva

O plano ψ cruza o PHP em $h\psi$ e o PFP em $f\psi$. Esses são os seus traços horizontal e frontal, respectivamente.

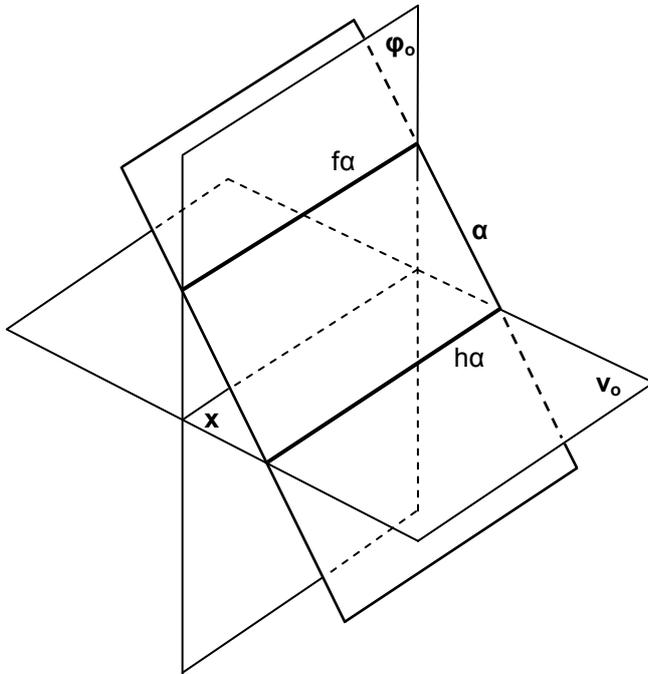


O plano de perfil representado pelos seus traços

Representado pelos traços, o plano de perfil apresenta apenas esta possibilidade: os seus traços são sempre coincidentes e perpendiculares ao eixo x . De notar que a coincidência entre os traços não existe no espaço mas passa a existir após o rebatimento dos planos de projeção.

Plano de rampa

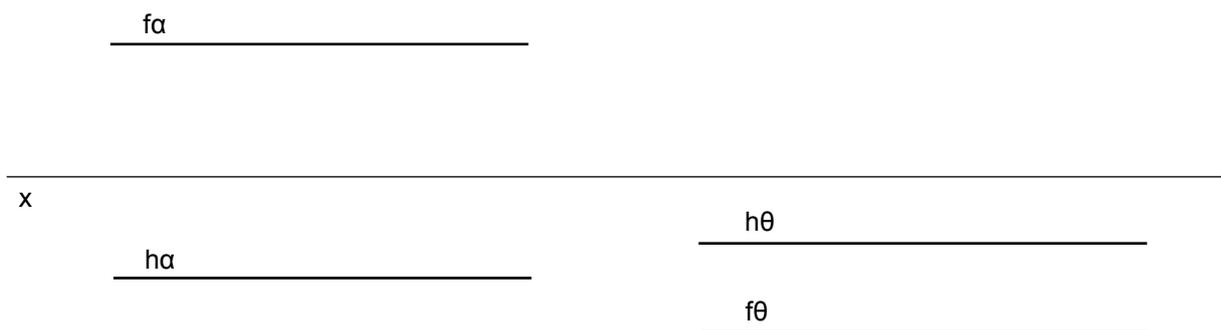
O plano de rampa é oblíquo aos dois planos de projeção e paralelo ao eixo x. Tem dois traços. Este plano não é projetante.



$$\alpha \begin{cases} \perp \text{ PFP} \\ \perp \text{ PHP} \\ // \text{ eixo } x \end{cases}$$

O plano de rampa em perspectiva

O plano α cruza o PHP em $h\alpha$ e o PFP em $f\alpha$. São esses os seus traços, paralelos ao eixo x.

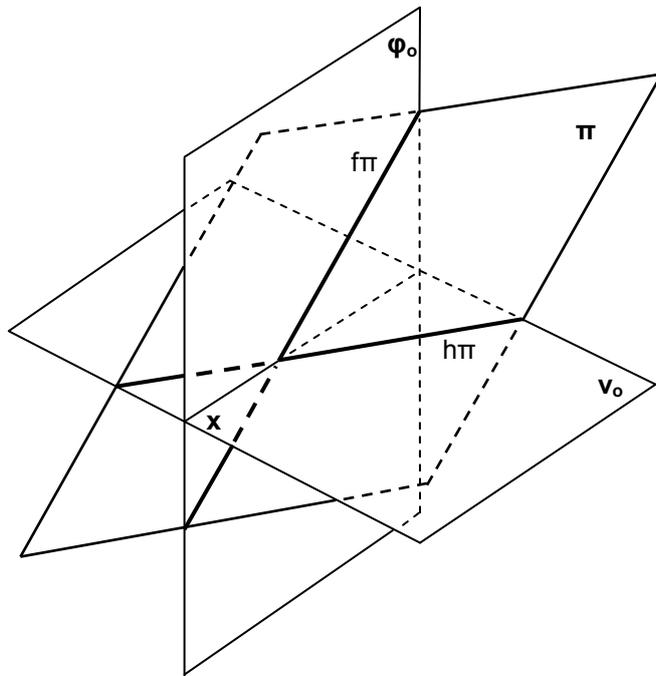


O plano de rampa representado pelos seus traços

Os traços do plano α correspondem ao plano representado em perspectiva; o seu traço horizontal tem afastamento positivo e o frontal tem cota positiva. Esse plano passa pelos diedros II, I e IV. O plano θ está numa posição diferente, passando pelos diedros I, IV e III.

Plano oblíquo

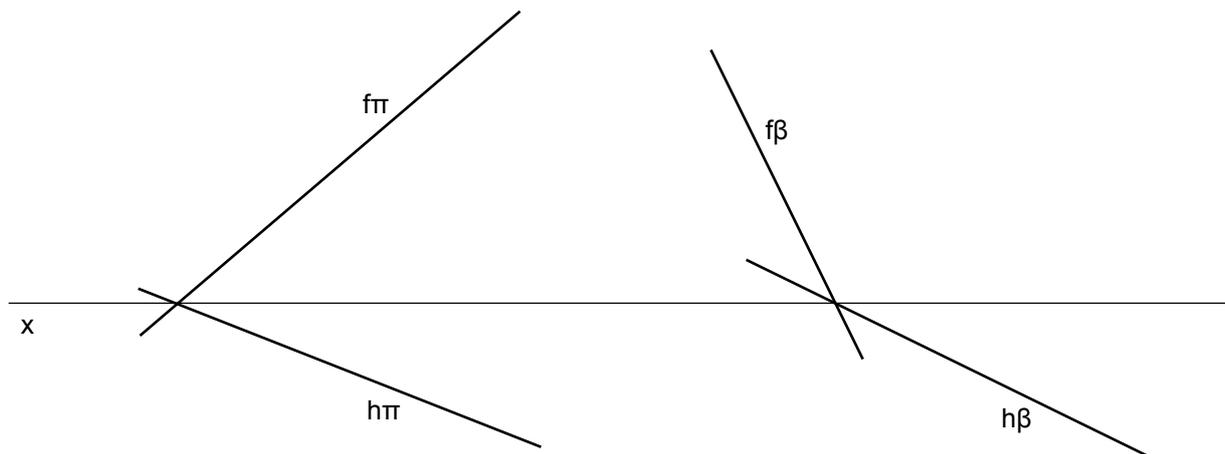
O plano oblíquo é oblíquo aos dois planos de projeção e oblíquo ao eixo x . Tem dois traços. Este plano não é projetante.



$$\pi \begin{cases} \perp \text{ PFP} \\ \perp \text{ PHP} \\ \perp \text{ eixo } x \end{cases}$$

O plano oblíquo em perspectiva

O plano π cruza o PHP em $h\pi$ e o PFP em $f\pi$. São esses os seus traços, oblíquos ao eixo x .

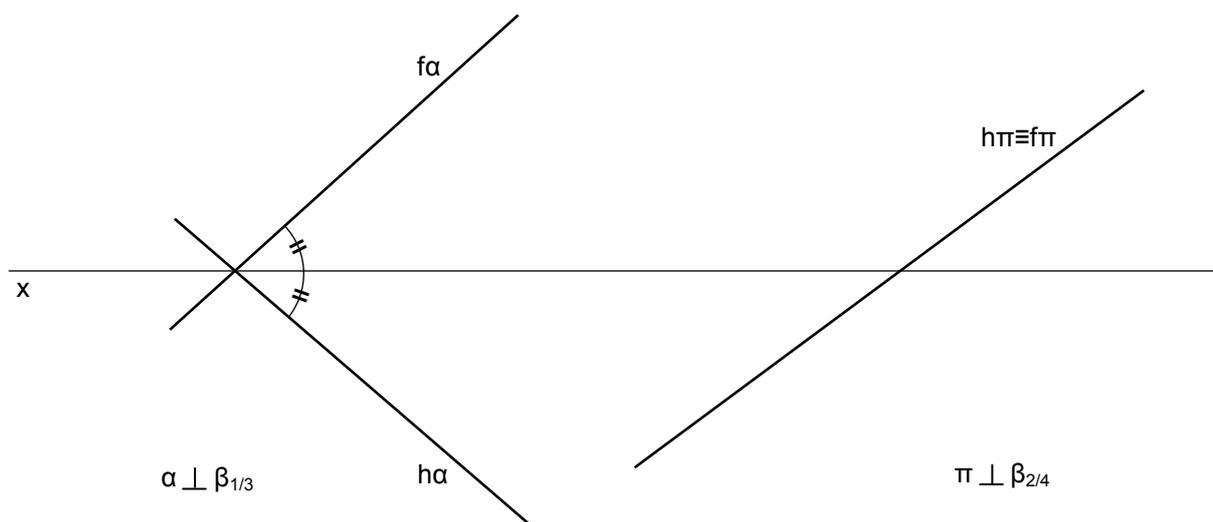


O plano oblíquo representado pelos seus traços

Os traços do plano π , ambos com abertura para a direita, correspondem ao plano representado em perspectiva. O plano β apresenta traços com aberturas para lados contrários. Os traços do plano oblíquo são ambos oblíquos ao eixo x , podendo apresentar aberturas para lados iguais ou diferentes.

Posições particulares do plano oblíquo

O plano oblíquo pode apresentar duas posições particulares, cujos traços se apresentam na imagem seguinte.

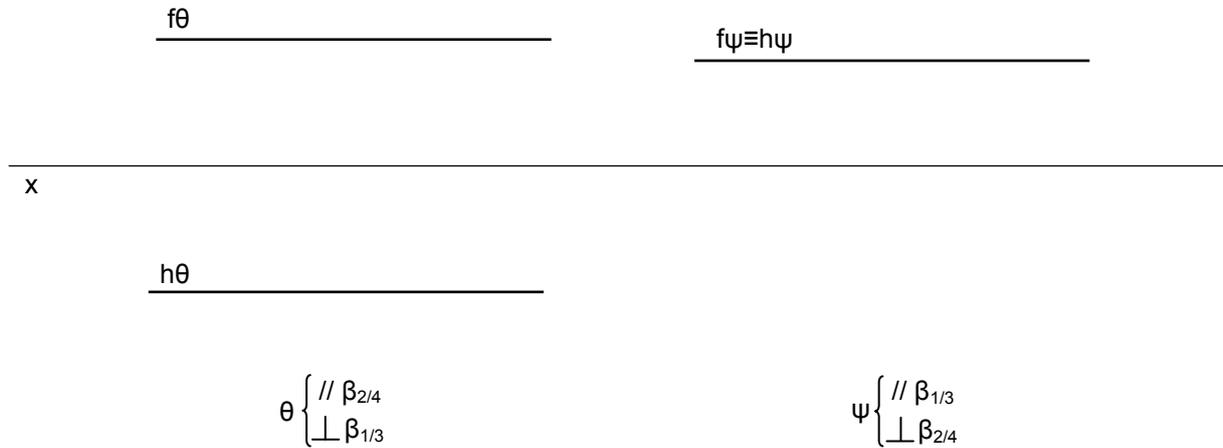


Traços dos planos oblíquos em posições particulares

Os traços do plano α têm ângulos iguais e aberturas para o mesmo lado; trata-se de um plano perpendicular ao $\beta_{1/3}$. Se representarmos uma recta de perfil nesse plano ela será também perpendicular ao $\beta_{1/3}$. Os traços do plano π são coincidentes; trata-se de um plano perpendicular ao $\beta_{2/4}$.

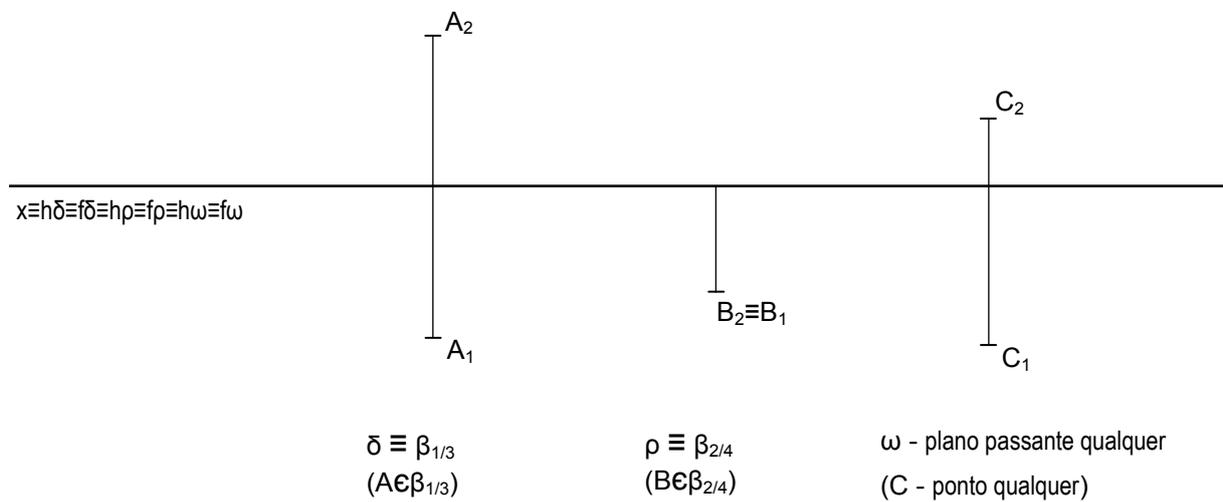
Posições particulares do plano de rampa

O plano de rampa apresenta cinco posições particulares, que são semelhantes às da reta de perfil.



Planos perpendiculares / paralelos aos planos bissetores

Um plano de rampa que tenha traços com medidas iguais, um para cada lado do eixo x, é paralelo ao $\beta_{2/4}$ e perpendicular ao $\beta_{1/3}$; é essa a situação do plano θ . Um plano de rampa com os traços coincidentes é paralelo ao $\beta_{1/3}$ e perpendicular ao $\beta_{2/4}$; o plano ψ está nessas condições.

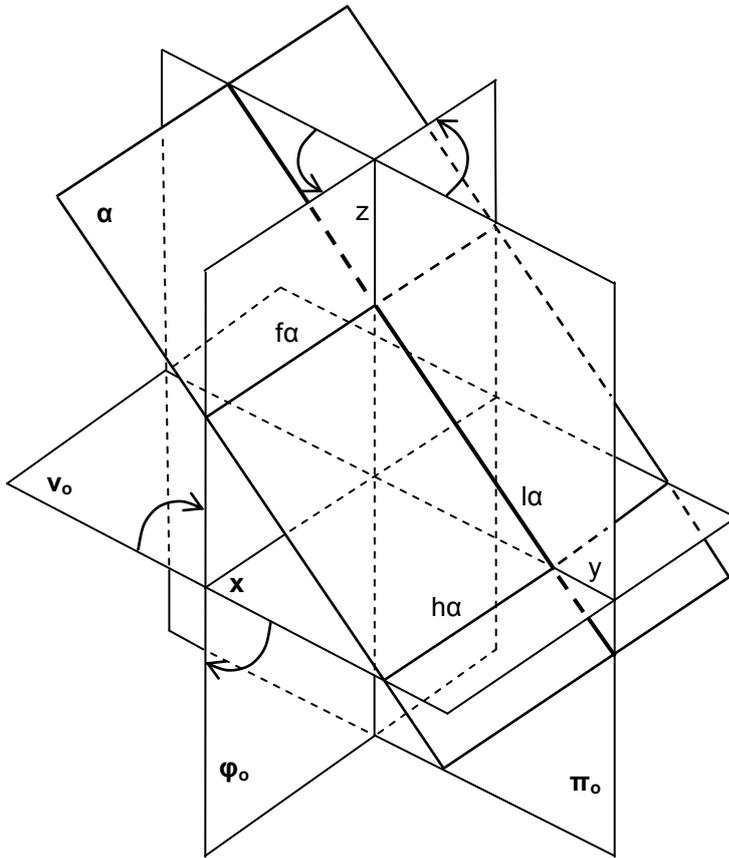


Planos passantes

São passantes os planos que contêm o eixo x. Os traços desses planos são, por isso, coincidentes com o eixo x. Estão aqui representados três. O plano δ está coincidente com o $\beta_{1/3}$, pois está definido pelo eixo x e pelo ponto A, que se situa nesse bissetor. O plano ρ é coincidente com o $\beta_{2/4}$, uma vez que está definido pelo eixo x e pelo ponto B, desse bissetor. O plano ω é um plano passante qualquer, pois está definido pelo eixo x e pelo ponto C, que não se situa em qualquer dos planos bissetores.

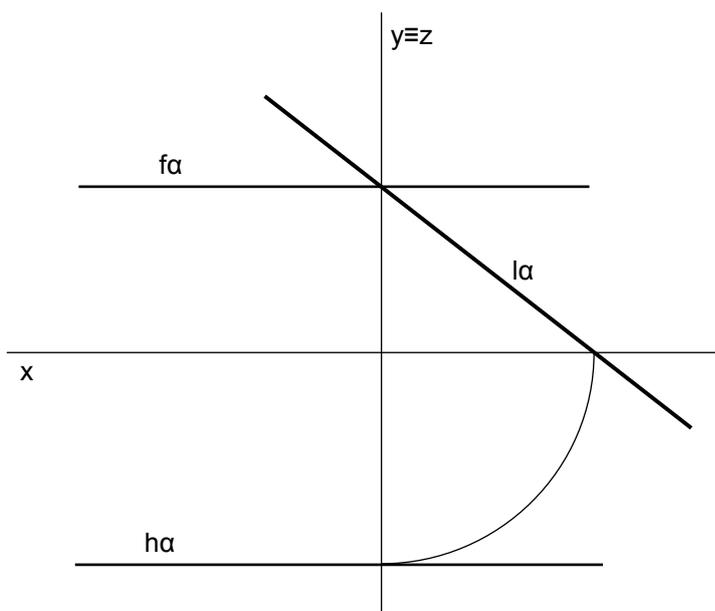
O traço lateral do plano de rampa

Alguns exercícios de Distâncias, Ângulos, Paralelismos e Perpendicularidades, entre outros, determinam-se recorrendo ao traço lateral do plano de rampa. Mostra-se aqui como se determina esse traço.



O traço lateral do plano de rampa em perspectiva

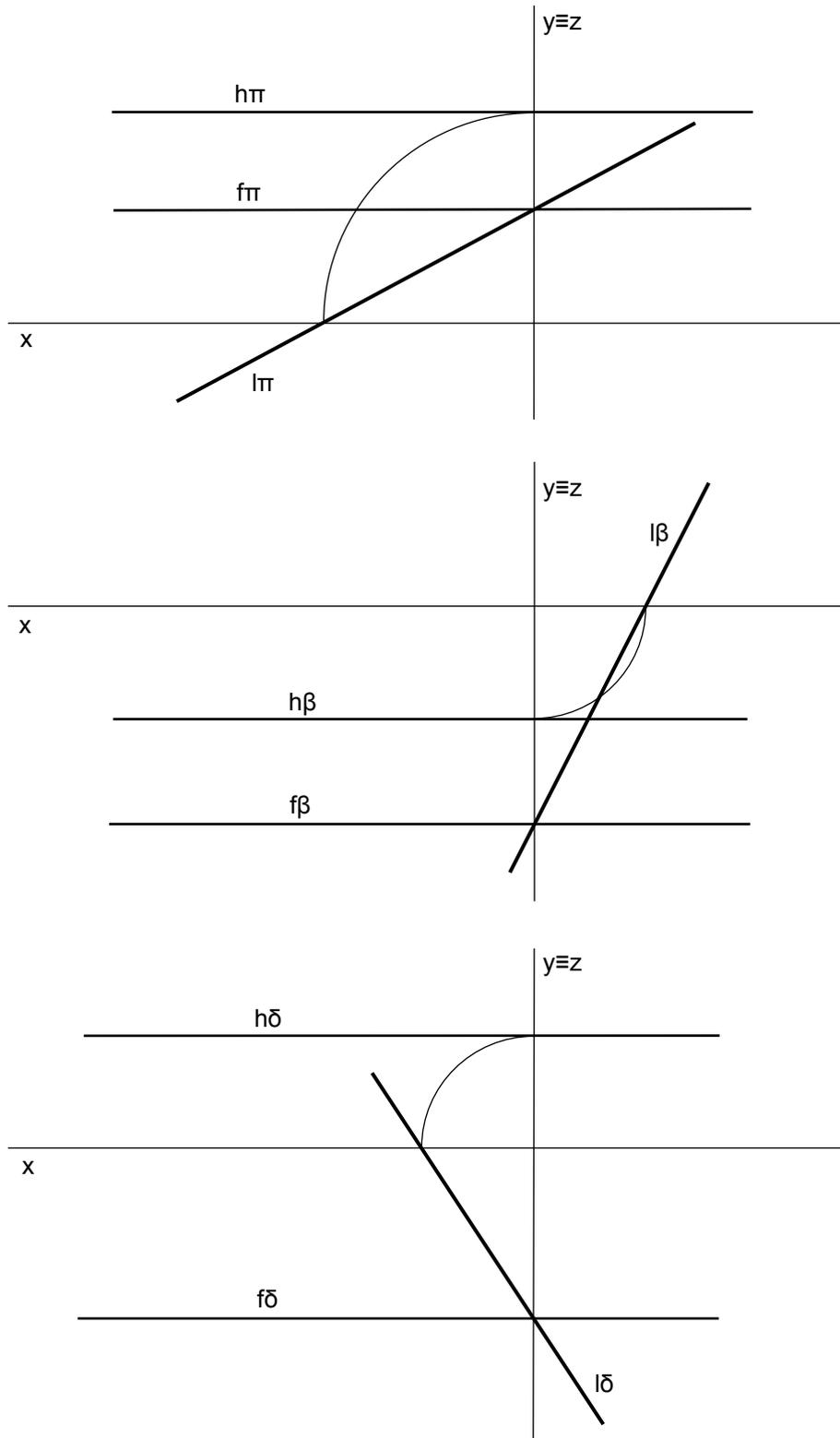
O traço lateral do plano de rampa é a reta onde este corta o PLP. Essa reta cruza-se com o traço frontal no eixo z e com o traço horizontal no eixo y, pontos com os quais se determina o traço lateral, como se vê abaixo.



O traço lateral do plano de rampa

O traço lateral do plano de rampa obtém-se rodando para o eixo x a medida correspondente ao afastamento do traço horizontal, unindo-se ao ponto de cruzamento do traço frontal com o eixo z.

Aqui mostra-se como se determina o traço lateral de planos de rampa em posições diferentes da que foi mostrada na página anterior.

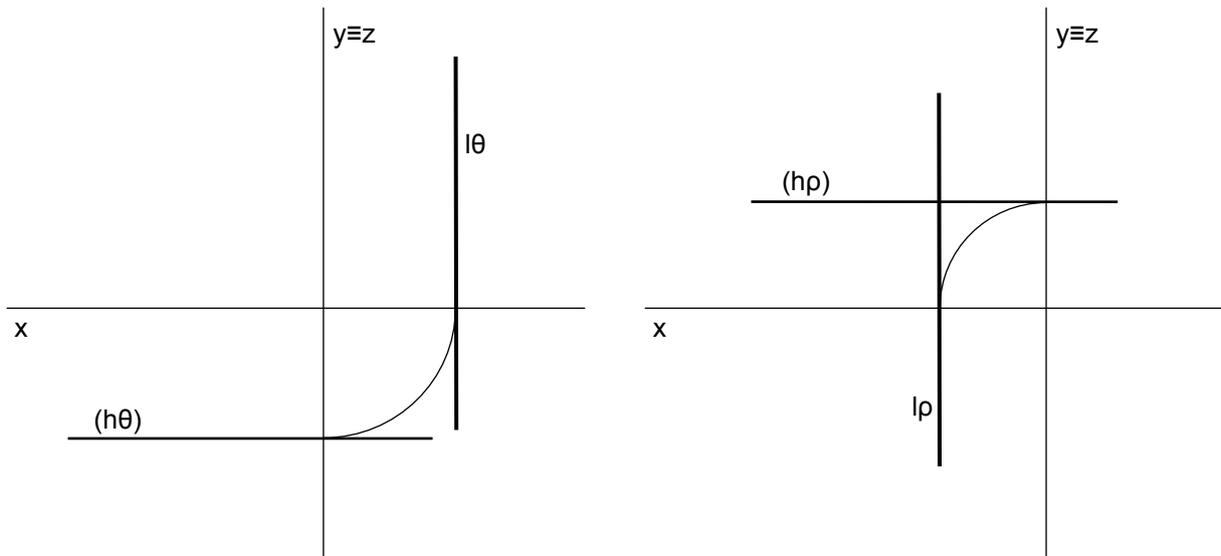


O traço lateral do plano de rampa em diferentes posições

No primeiro caso temos um plano de rampa com o traço horizontal com afastamento negativo; no segundo o traço frontal tem cota negativa; no terceiro ambos os traços têm valores negativos. A rotação da medida do traço horizontal faz-se sempre no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

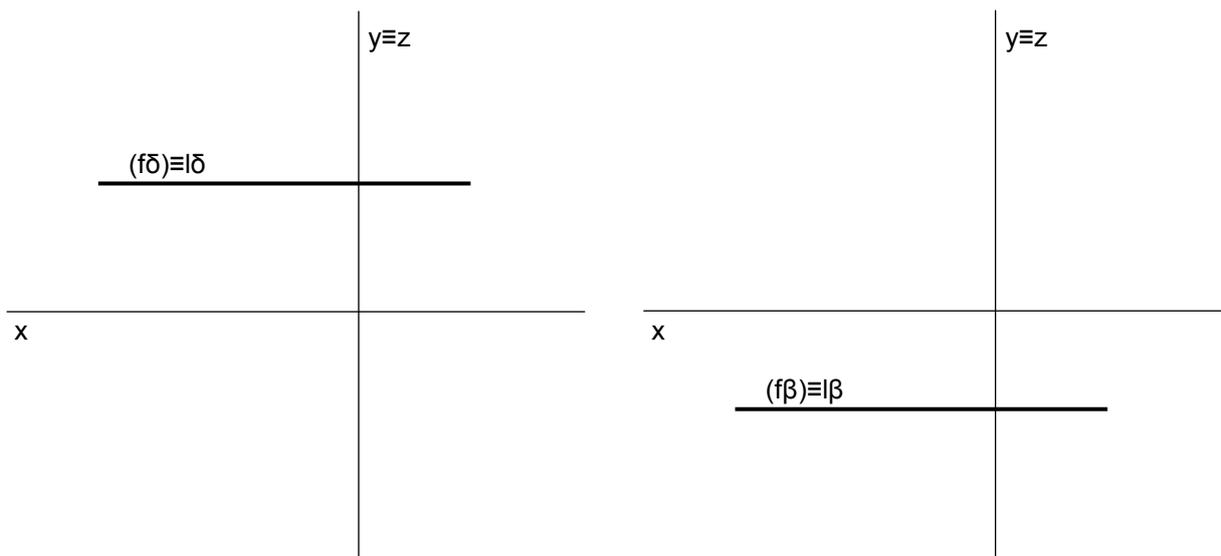
O traço lateral dos planos frontal e horizontal

Além do plano de rampa, os planos frontal e horizontal são também perpendiculares ao plano lateral de projeção. A determinação dos traços laterais desses planos pode ser útil essencialmente em exercícios de Ângulos e de Distâncias.



O traço lateral do plano frontal

O traço lateral do plano frontal é paralelo ao eixo z e obtém-se rodando a medida do afastamento do traço horizontal no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. À esquerda temos um plano com afastamento positivo, à direita um com afastamento negativo.

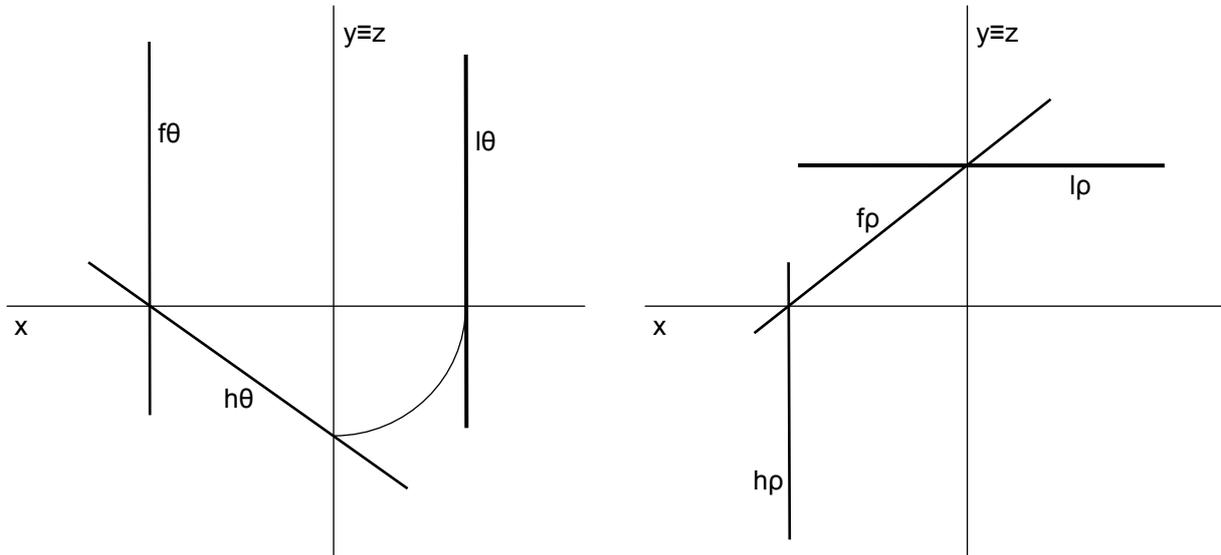


O traço lateral do plano horizontal

O traço lateral do plano horizontal obtém-se automaticamente. No espaço, ele é paralelo ao eixo y; após o rebatimento do PLP fica coincidente com o traço frontal do plano, tenha ele cota positiva ou negativa.

O traço lateral dos planos vertical, de topo e oblíquo

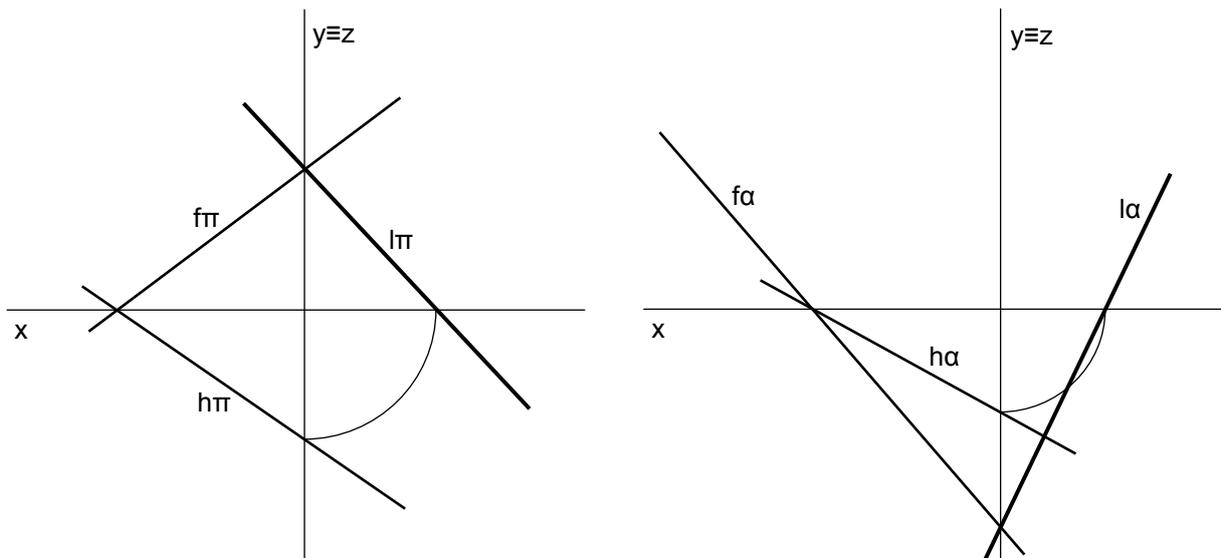
A determinação dos traços laterais destes planos não tem qualquer aplicação noutros capítulos. De qualquer modo, mostra-se aqui como se procede a essa determinação.



O traço lateral dos planos vertical e de topo

O traço lateral do plano vertical é vertical; para o determinar basta rodar o ponto onde o seu traço horizontal cruza $y=z$.

O traço lateral do plano de topo é de topo; devido ao rebatimento o plano lateral de projeção, fica paralelo ao eixo x , passando pelo ponto onde o traço frontal cruza $y=z$.

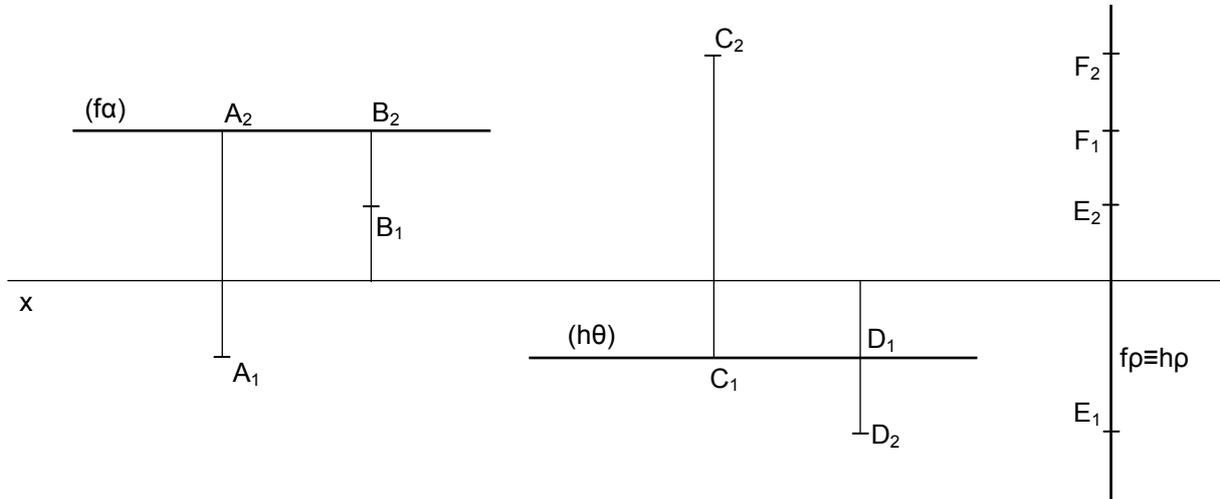


O traço lateral do plano oblíquo

O traço lateral do plano oblíquo é de perfil. Para o determinar basta rodar o ponto de cruzamento do traço horizontal com $y=z$ e unir ao ponto de cruzamento do traço frontal com a mesma reta. À esquerda está um plano com traços abertos para o mesmo lado; à direita está um plano com traços abertos para lados contrários.

Marcação de pontos em planos projetantes

A marcação de pontos em planos projetantes faz-se diretamente, uma vez que uma das projeções do ponto fica sempre no traço sobre o qual o plano é projetante. No caso do plano de perfil (por ser duplamente projetante) ambas as projeções do ponto ficam em ambos os traços.



Marcação de pontos nos planos horizontal, frontal e de perfil

O plano horizontal α tem 2cm de cota; os pontos que lhe pertencem têm também essa medida. As coordenadas dos pontos representados no plano α são:

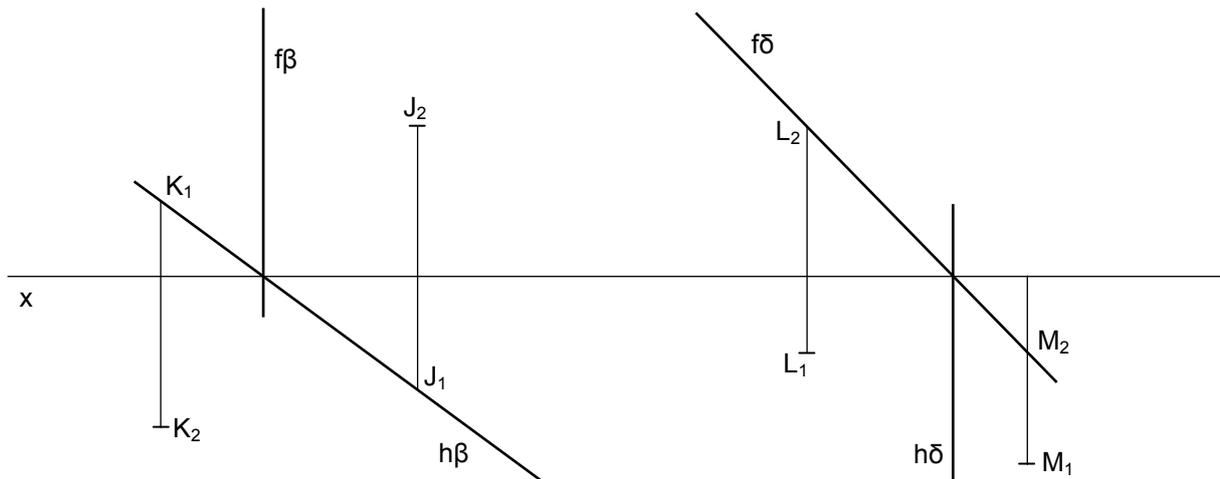
$$A(1;2) \quad B(-1;2)$$

O plano frontal θ tem 1cm de afastamento; os pontos que lhe pertencem terão essa medida. As coordenadas dos pontos representados no plano θ são:

$$C(1;3) \quad D(1;-2)$$

As coordenadas dos pontos representados no plano ρ são:

$$E(2;1) \quad F(-2;3)$$



Marcação de pontos nos planos vertical e de topo

As coordenadas dos pontos representados no plano β são:

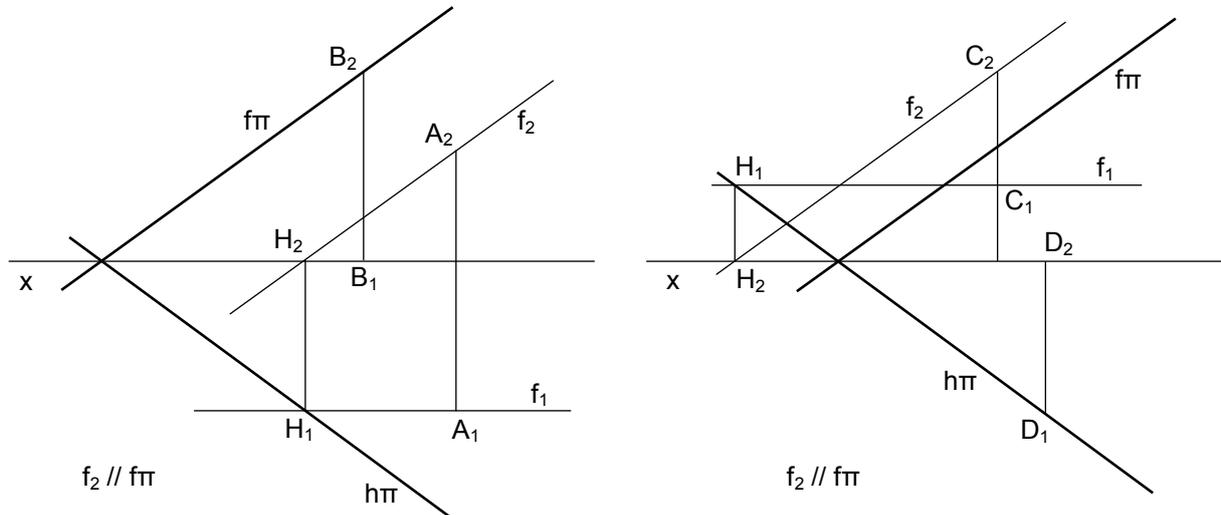
$$J(1,5;2) \quad K(-1;-2)$$

As coordenadas dos pontos representados no plano δ são:

$$L(1;2) \quad M(2,5;-1)$$

Marcação de pontos em planos não projetantes

A marcação de pontos em planos não projetantes faz-se com recurso a retas auxiliares desses planos. Apenas os pontos situados nos traços se podem marcar diretamente.

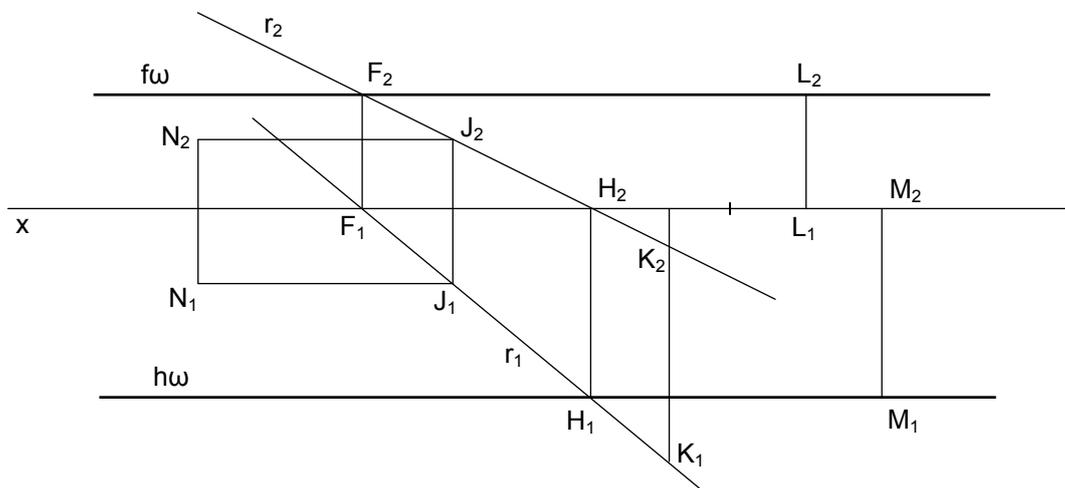


Marcação de pontos no plano oblíquo

Para marcar pontos no plano oblíquo deve utilizar-se uma reta frontal ou horizontal do plano, reta essa que tenha uma das coordenadas do ponto. Aqui optou-se por utilizar retas frontais em ambos os casos, que definem, à partida, as medidas dos afastamentos dos pontos dados.

Os pontos marcados têm as seguintes coordenadas:

$$A(2;1,5) \quad B(0;2,5) \quad C(-1;2,5) \quad D(2;0)$$



Marcação de pontos no plano de rampa

Para marcar pontos no plano de rampa utiliza-se uma reta auxiliar oblíqua que lhe pertença. Neste plano não é possível dar simultaneamente afastamento e cota, mas pode-se indicar também um valor para a abcissa. Os traços frontal e horizontal destes planos têm, respetivamente, 1,5cm de cota e 2,5cm de afastamento.

Os pontos marcados são os seguintes:

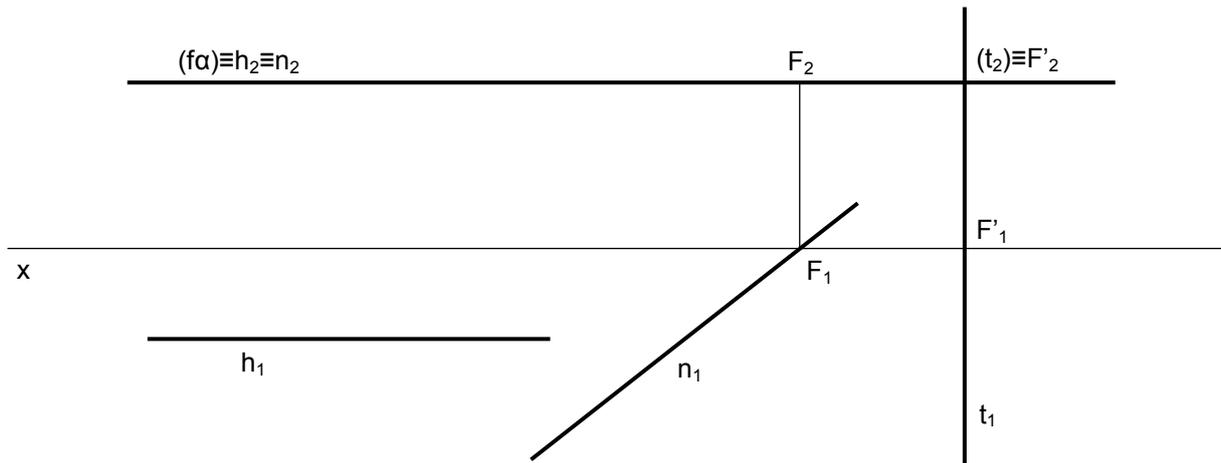
J, com 1cm de afastamento K, com -0,5cm de cota L, com 1,5cm de cota e -1cm de abcissa

M, com 2,5cm de afastamento e -2cm de abcissa N, com 1cm de afastamento e 7cm de abcissa

O ponto N marcou-se com a ajuda do ponto J, que tem a mesmo afastamento.

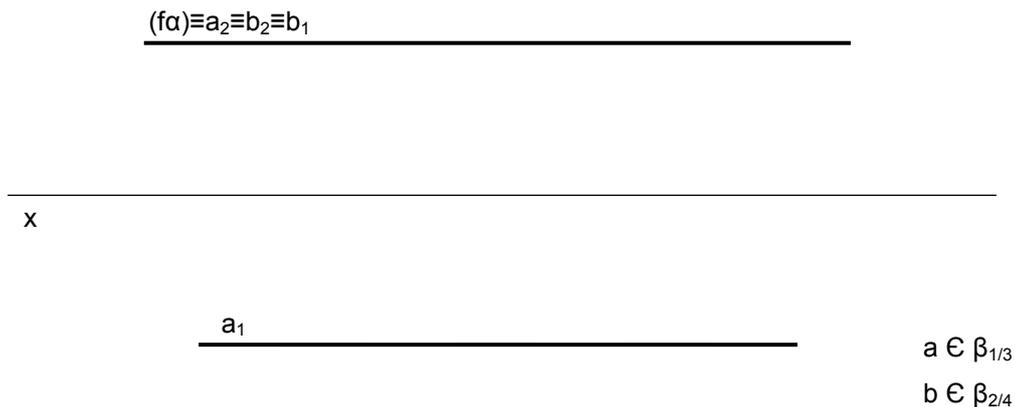
Retas do plano horizontal

O plano horizontal pode conter três tipos de retas diferentes. Como este plano é paralelo ao plano horizontal de projeção, todas as retas que ele contém são também paralelas a esse plano. Sendo projetante frontal, as retas são projetadas frontalmente no seu traço.



Tipos de retas que existem no plano horizontal

O plano horizontal pode conter retas fronto-horizontais, horizontais e de topo. Apresenta-se um exemplo de cada tipo.

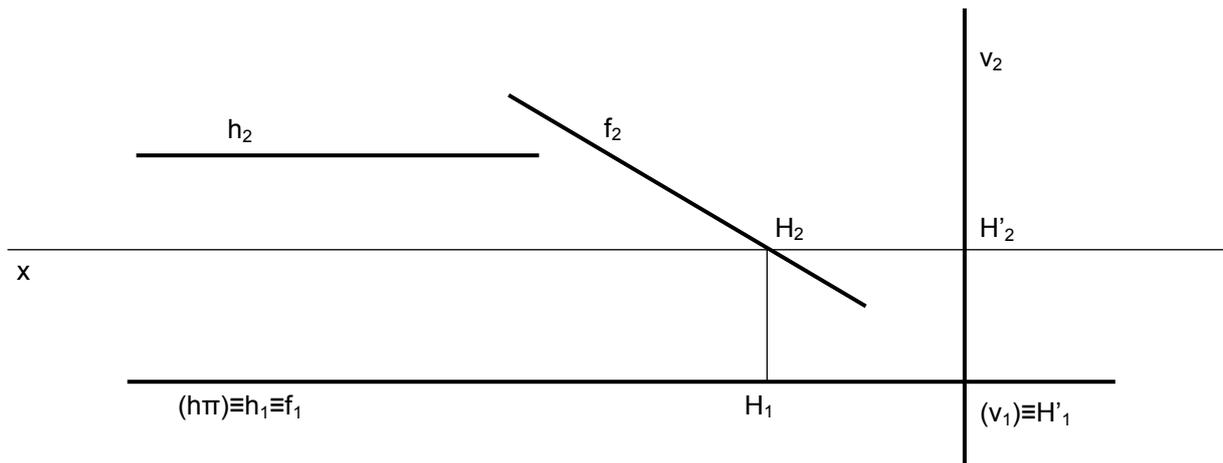


Retas dos planos bissetores

As retas a e b são aquelas em que o plano α corta o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respetivamente. A reta a tem projeções com medidas iguais, uma para cada lado do eixo x ; a reta b tem projeções coincidentes. Ambas são fronto-horizontais. Estas retas determinam-se diretamente, não sendo necessário traçado auxiliar para o fazer.

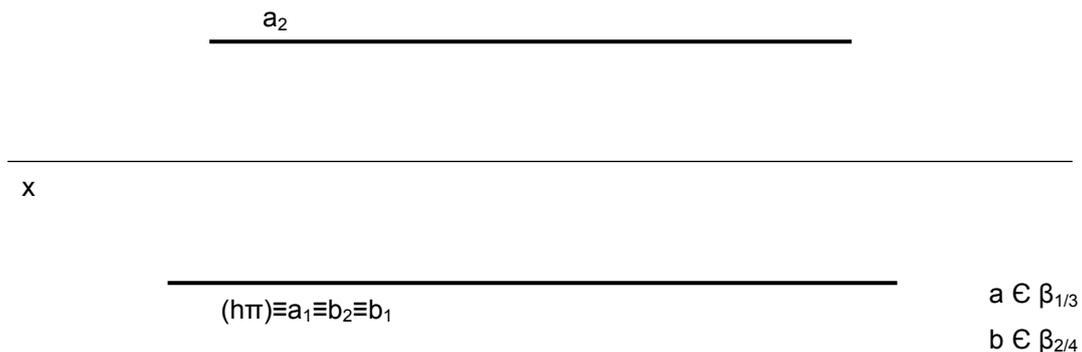
Retas do plano frontal

O plano frontal pode conter três tipos de retas diferentes. Como este plano é paralelo ao plano frontal de projeção, todas as retas que ele contém são também paralelas a esse plano. Sendo um plano projetante horizontal, as retas são projetadas no seu traço.



Tipos de retas que existem no plano frontal

O plano frontal pode conter retas fronto-horizontais, frontais e verticais. Apresenta-se um exemplo de cada tipo.

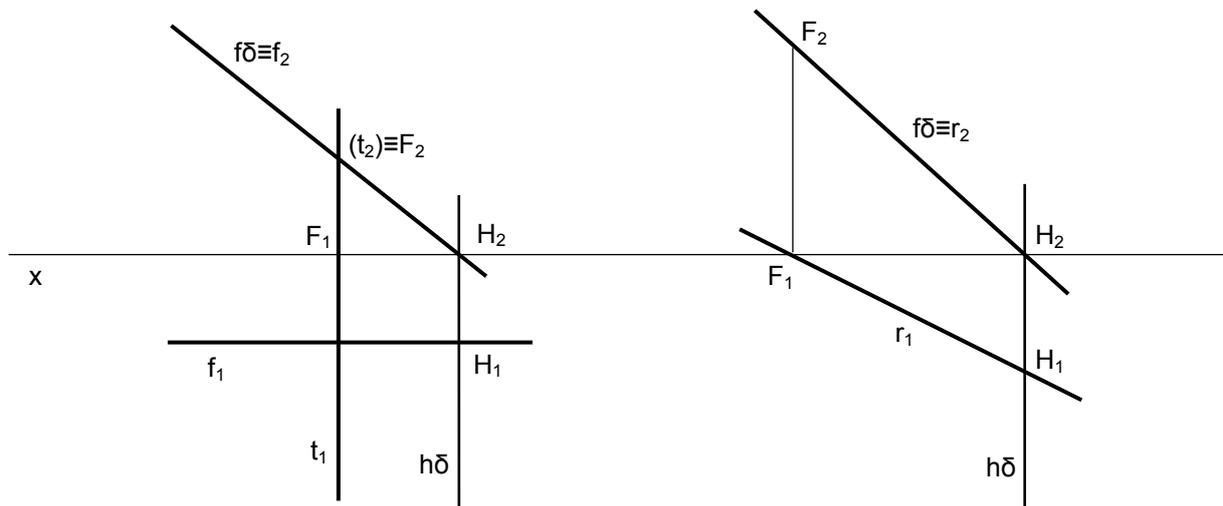


Retas dos planos bissetores

As retas a e b são aquelas em que o plano π corta o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respectivamente. A reta a tem medidas iguais, uma para cada lado do eixo x; a reta b tem projeções coincidentes. São retas fronto-horizontais, que se determinam diretamente, sem ajuda de traçado auxiliar.

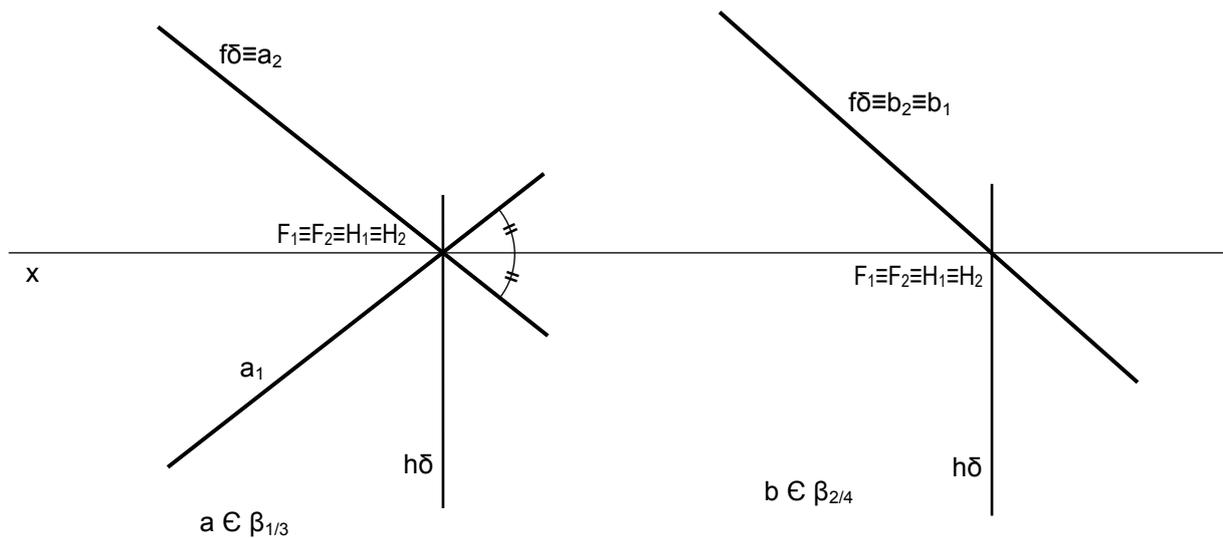
Retas do plano de topo

O plano de topo pode conter três tipos de retas diferentes. É um plano projetante frontal, pelo que as retas que ele contém são projetadas frontalmente no seu traço frontal.



Tipos de retas que existem no plano de topo

O plano de topo pode conter as retas frontal e de topo, representadas à esquerda, e oblíqua, representada à direita.

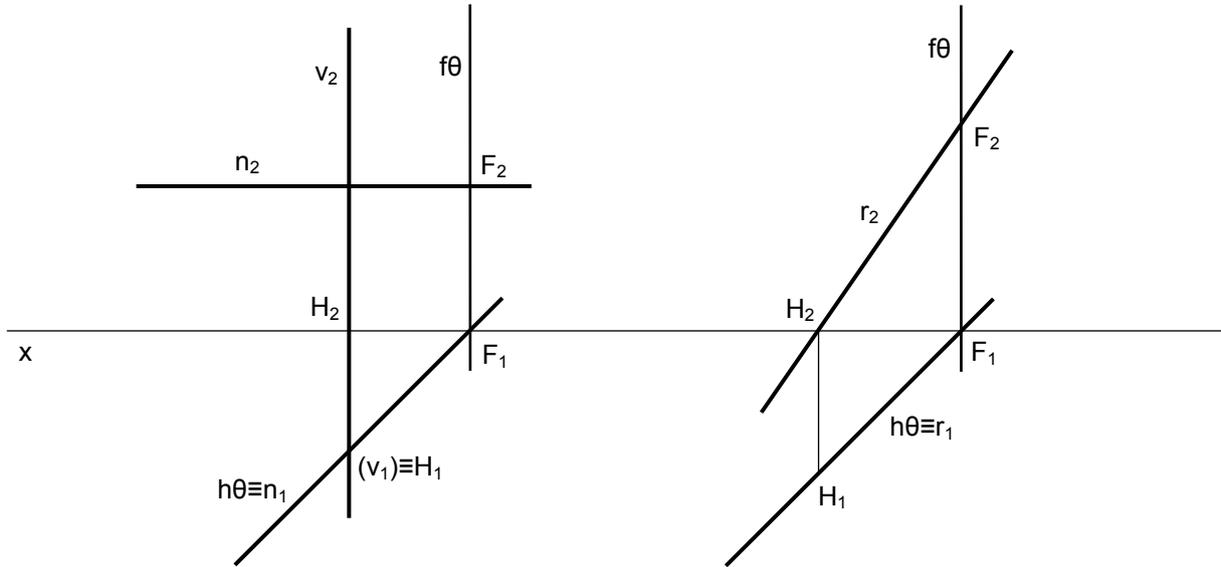


Retas dos planos bissetores

As retas a e b são aquelas em o plano α corta o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respetivamente. A reta a tem ângulos iguais; a reta b tem projeções coincidente. Ambas são oblíquas passantes. Estas retas determinam-se diretamente, sem necessidade de traçado auxiliar.

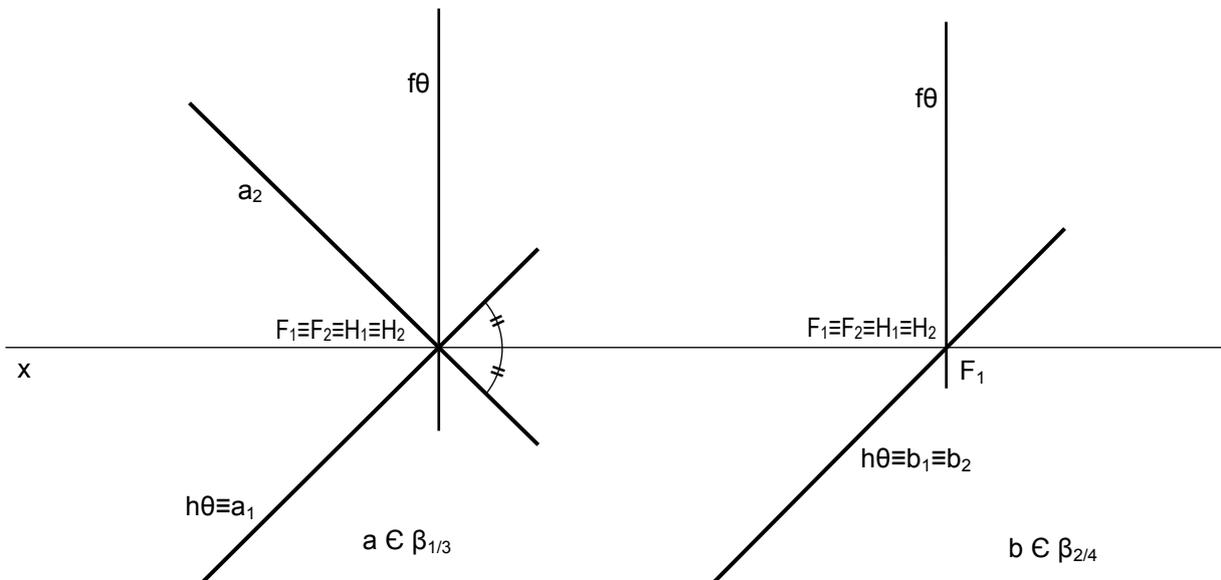
Retas do plano vertical

O plano vertical pode conter três tipos de retas diferentes. É um plano projetante horizontal, pelo que as retas que ele contém são projetadas horizontalmente no seu traço horizontal.



Tipos de retas que existem no plano vertical

O plano vertical pode conter as retas horizontal e vertical, representadas à esquerda, e oblíqua, representada à direita.

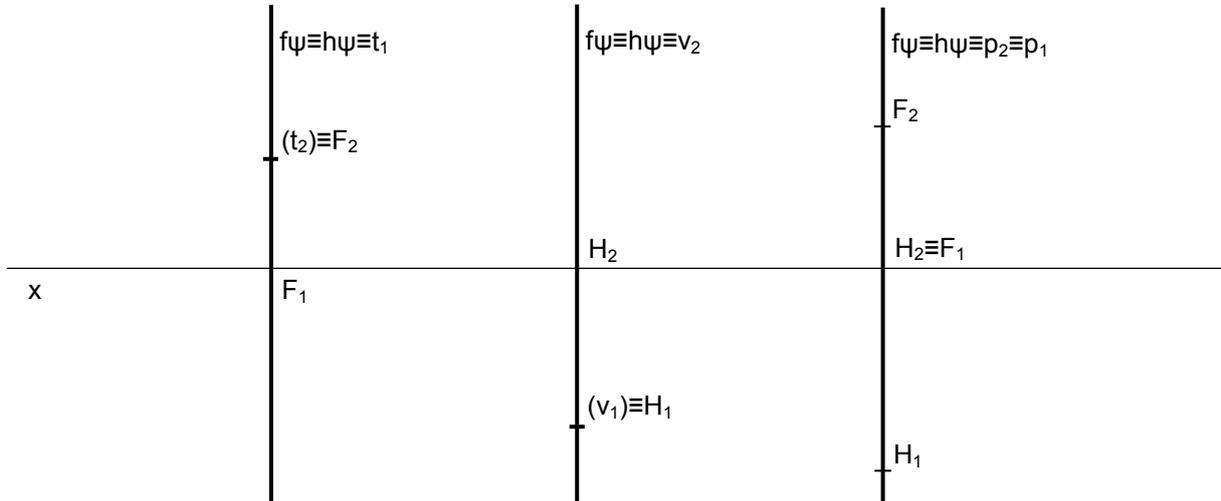


Retas dos planos bissetores

As retas a e b são aquelas em que o plano θ corta o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respetivamente. A reta a tem ângulos iguais; a reta b tem projeções coincidentes. São ambas oblíquas passantes. Estas retas determinam-se diretamente, sem ajuda de traçado auxiliar.

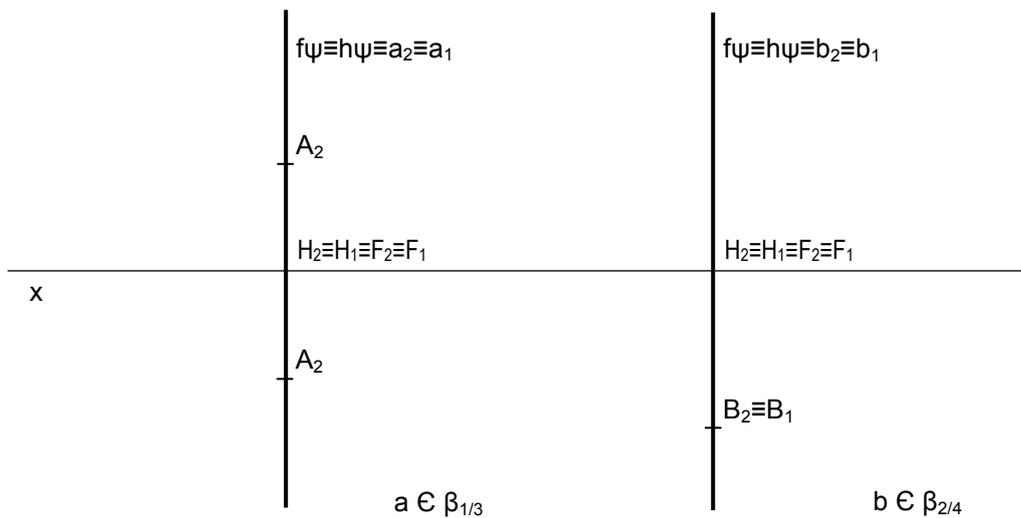
Retas do plano de perfil

O plano de perfil pode conter três tipos de retas. Tratando-se de um plano duplamente projetante, as retas que ele contém ficam projetadas em ambos os seus traços.



Tipos de retas que existem no plano de perfil

O plano de perfil pode conter retas de topo, verticais e de perfil, aqui representadas por essa ordem, da esquerda para a direita.

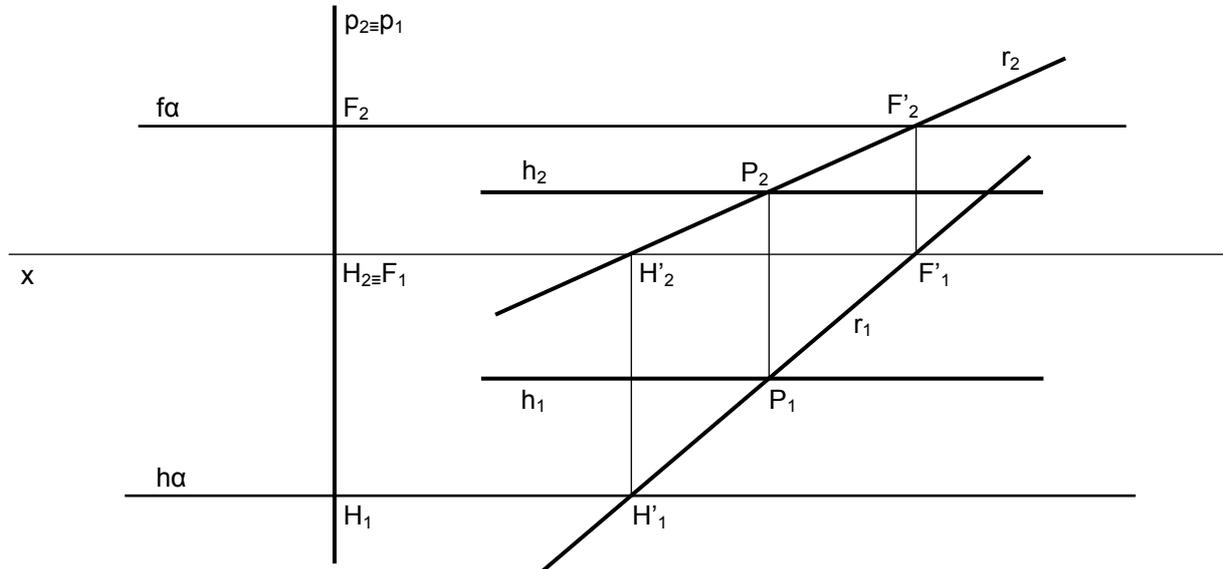


Retas dos planos bissetores

O plano ψ corta o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$ nas retas a e b , respectivamente. Trata-se de duas retas passantes, de perfil, por isso precisam de mais um ponto que as defina, além do ponto de passagem no eixo x , onde os seus traços coincidem.

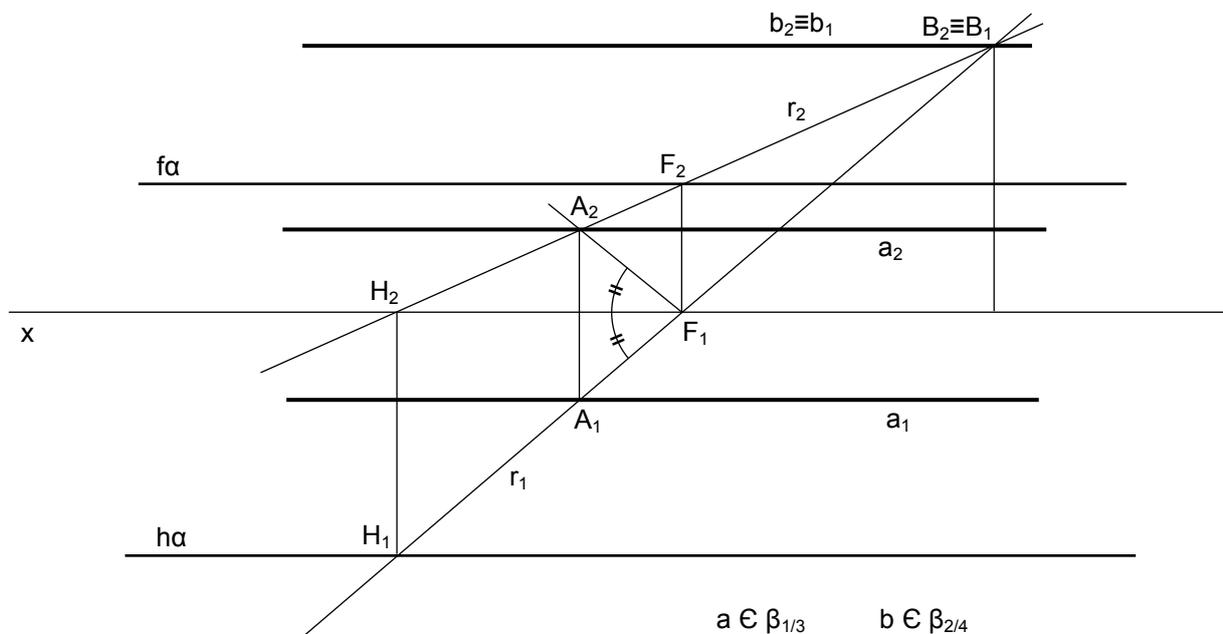
Retas do plano de rampa

O plano de rampa pode conter três tipos diferentes de retas. Este plano não é projetante, pelo que as retas não são projetadas em nenhum dos seus traços.



Tipos de retas que existem no plano de rampa

O plano de rampa pode conter as retas de perfil, oblíqua e fronto-horizontal. Para traçar uma reta fronto-horizontal neste plano, utiliza-se uma reta auxiliar oblíqua, com a qual ela se cruza, aqui no ponto P.

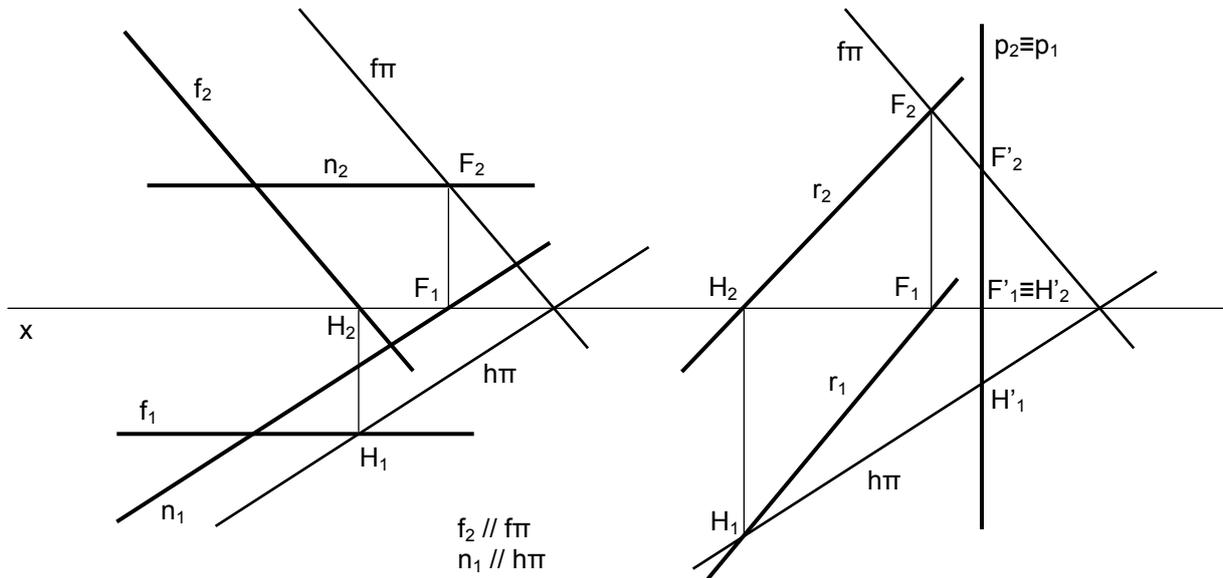


Retas dos planos bissetores

Para determinar as retas que o plano de rampa tem nos planos bissetores utiliza-se uma reta auxiliar oblíqua. Determinam-se os pontos A e B, onde essa reta cruza os planos bissetores, e por eles passam-se as retas a e b, que são fronto-horizontais.

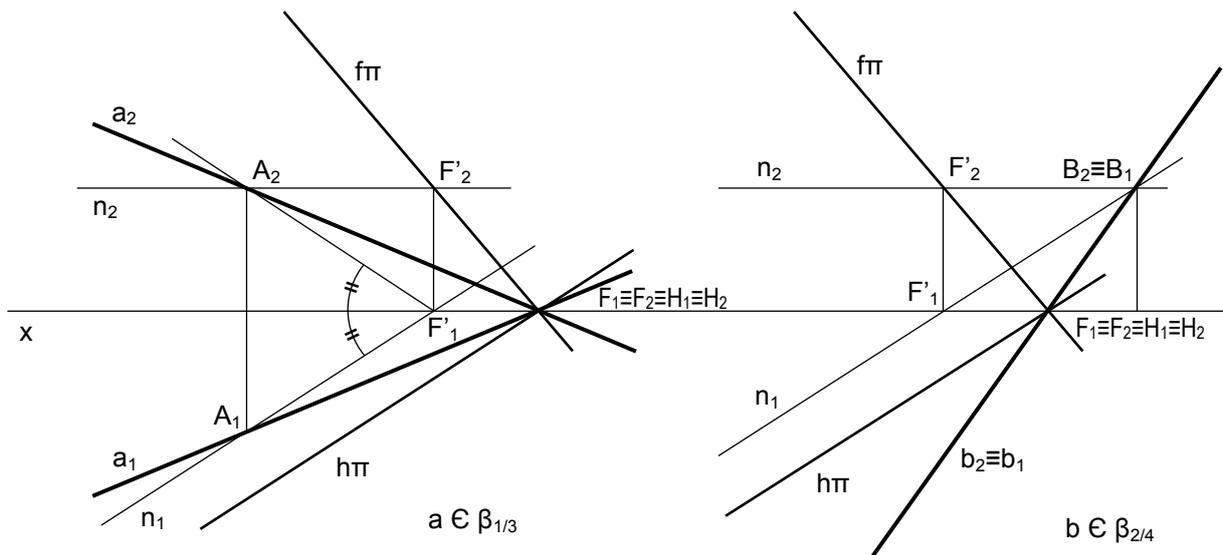
Retas do plano oblíquo

O plano oblíquo é o único que pode conter quatro tipos diferentes de retas. De notar que este plano, tal como o de rampa, não é projetante, pelo que também aqui as retas não são projetadas em nenhum dos seus traços.



Tipos de retas que existem no plano oblíquo

O plano oblíquo pode conter as retas horizontal e frontal, representadas à esquerda, oblíqua e de perfil, representadas à direita.

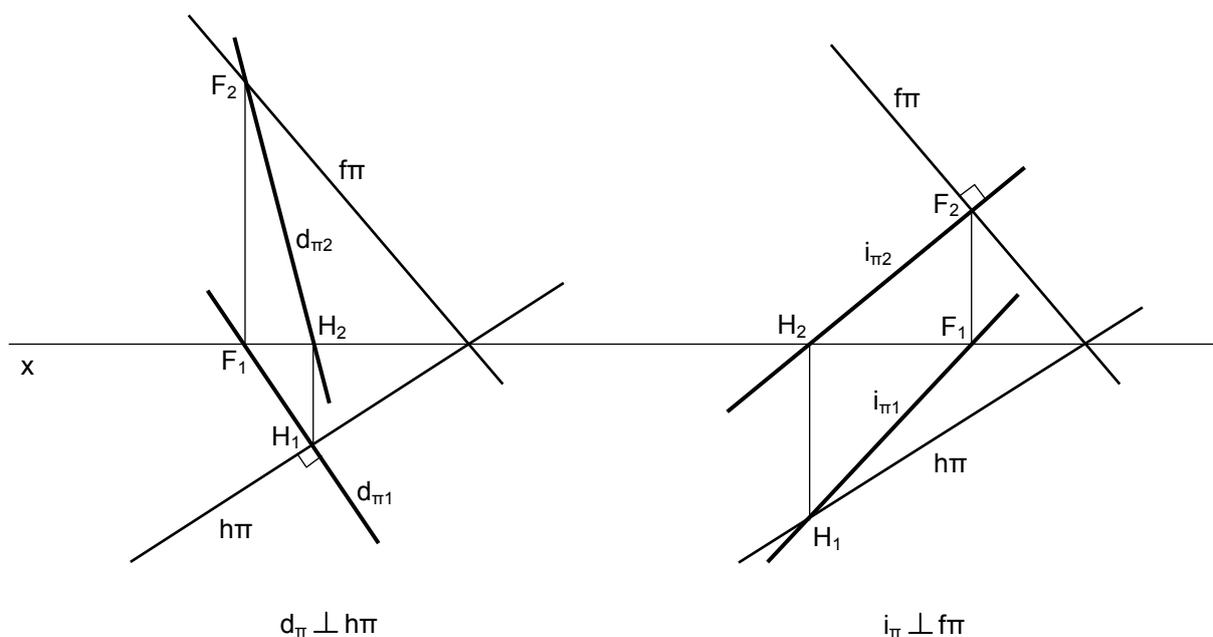


Retas dos planos bissetores

As retas a e b são aquelas em que o plano π corta o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respetivamente. Para determinar essas retas utilizou-se como auxiliar uma reta horizontal do plano. Os pontos da reta auxiliar que pertencem aos planos bissetores (ponto A, do $\beta_{1/3}$; ponto B do $\beta_{2/4}$) estão contidos nas retas homónimas. No plano oblíquo estas retas são passantes.

No caso do plano oblíquo, há ainda a referir as retas de maior declive e de maior inclinação, ambas oblíquas com uma particularidade: a primeira é perpendicular ao traço horizontal do plano, a segunda ao frontal.

No plano oblíquo, designam-se por retas notáveis as que são paralelas e as que são perpendiculares aos traços dos planos. São elas: horizontal e frontal (observadas na página anterior); de maior declive e de maior inclinação.



Retas de maior declive e de maior inclinação

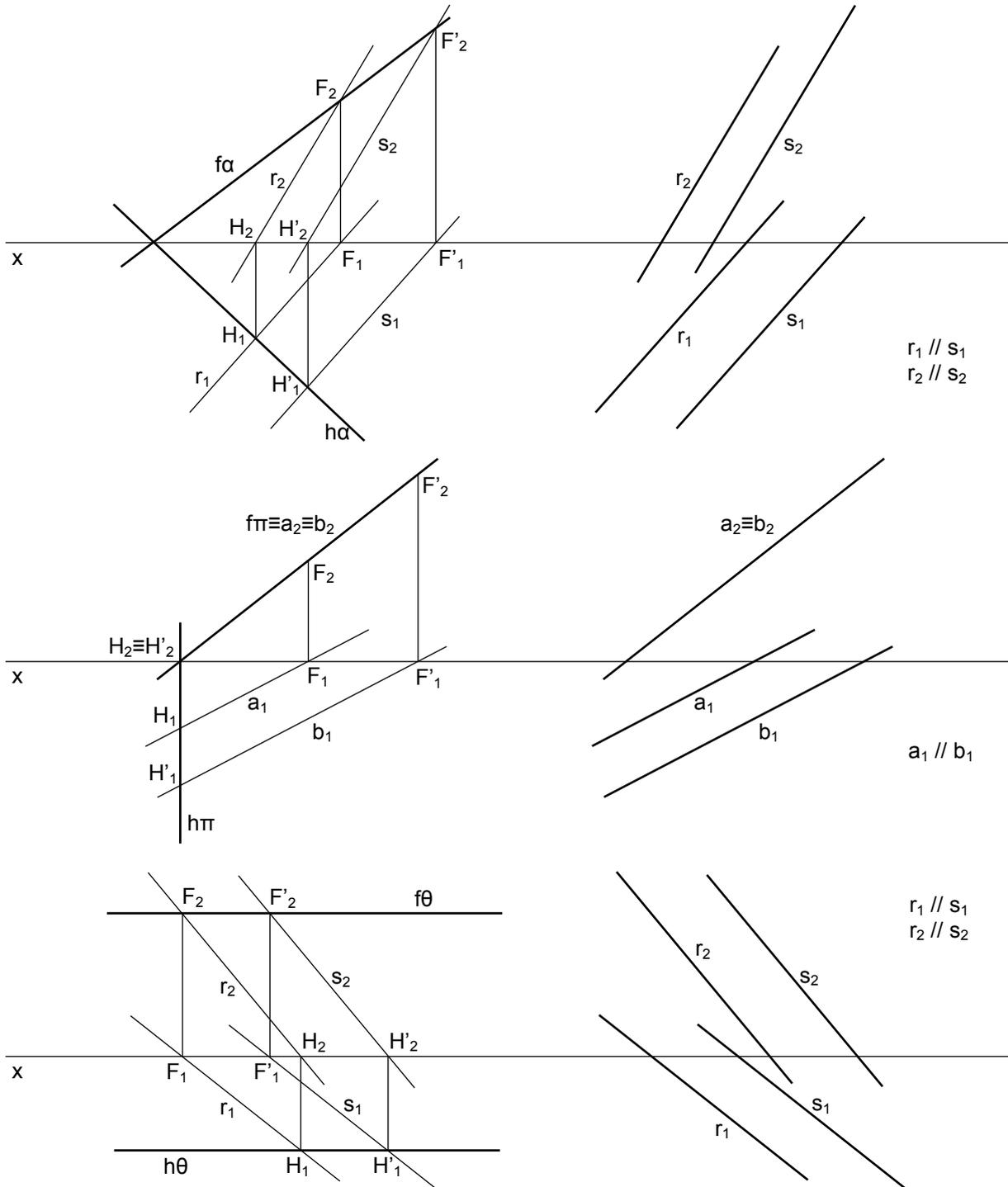
Uma reta perpendicular ao traço horizontal de um plano oblíquo designa-se por reta de maior declive; perpendicular ao traço frontal designa-se reta de maior inclinação.

No espaço, os ângulos que as retas de maior declive e de maior inclinação fazem, respetivamente com o PHP e com o PFP, são iguais aos ângulos que os próprios planos fazem com esses planos.

Planos definidos por duas retas

Um plano pode ser definido por quaisquer retas coplanares, uma vez que se situam num mesmo plano. Nesta página observa-se esse aspeto com retas paralelas.

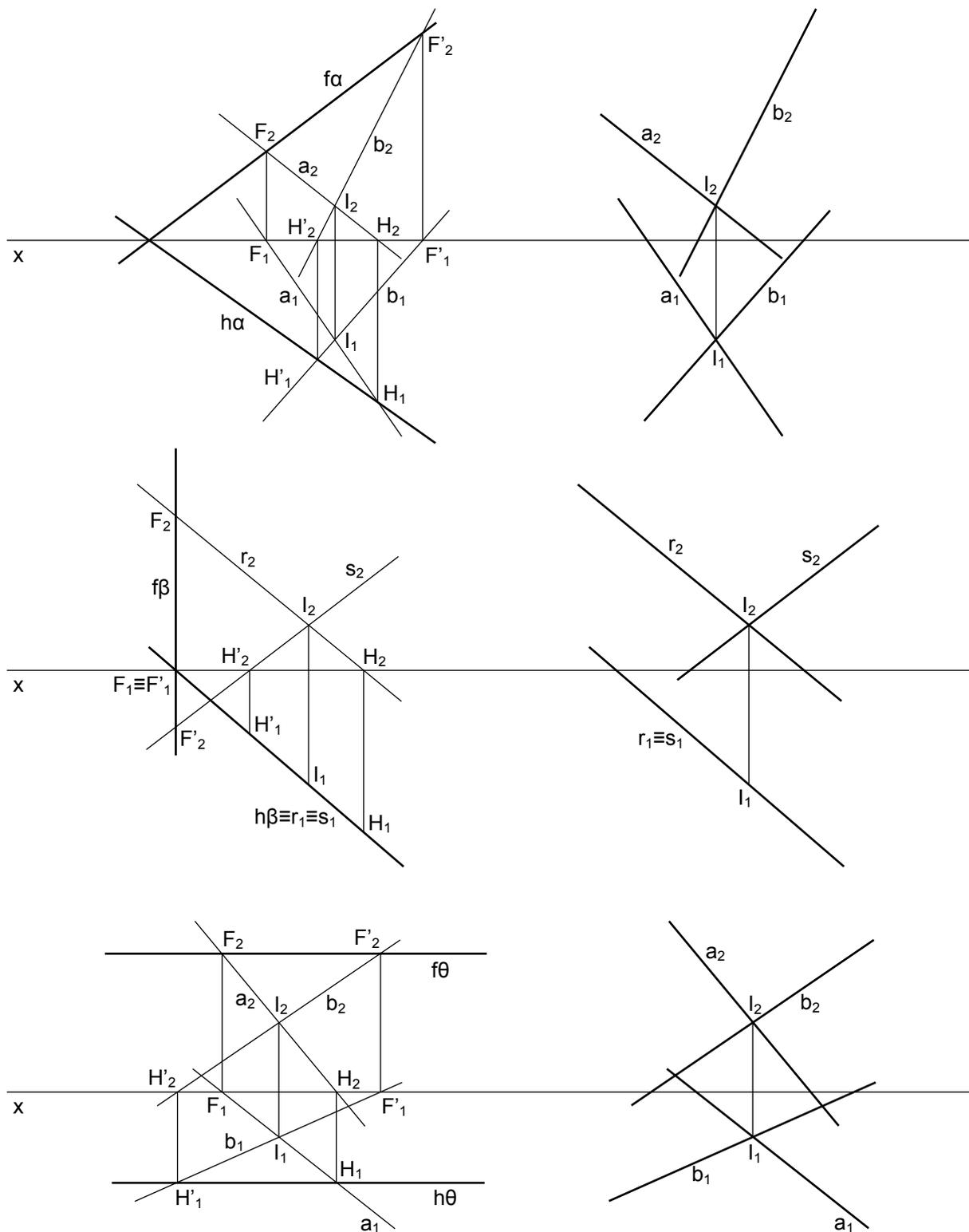
A utilidade e a aplicação dos planos definidos por retas será observada noutros capítulos.



Planos definidos por retas paralelas

À esquerda temos a representação de planos definidos pelos traços, com duas retas paralelas neles contidas. À direita temos as mesmas retas, representando os mesmos planos.

Duas retas complanares definem um plano. Nesta página, observa-se isso com retas concorrentes.

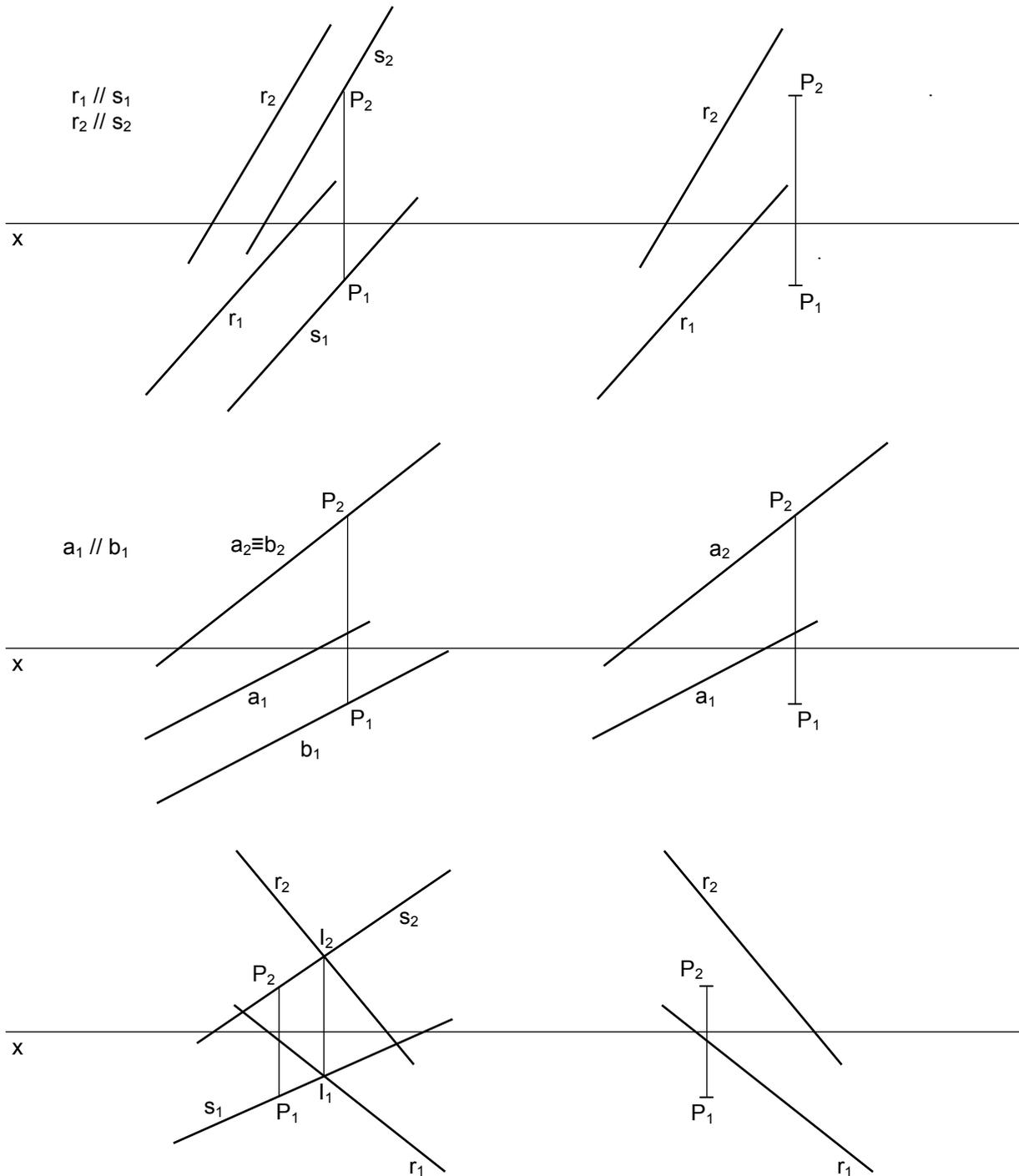


Planos definidos por retas concorrentes

À esquerda temos a representação de planos definidos pelos traços, com duas retas concorrentes neles contidas. À direita temos as mesmas retas representando os mesmos planos.

Planos definidos por uma reta e um ponto

Aqui vemos como um plano pode ser definido por uma reta e um ponto que não lhe pertença. Para melhor compreender o que aqui se mostra convém seguir a sequência desde a página 24.



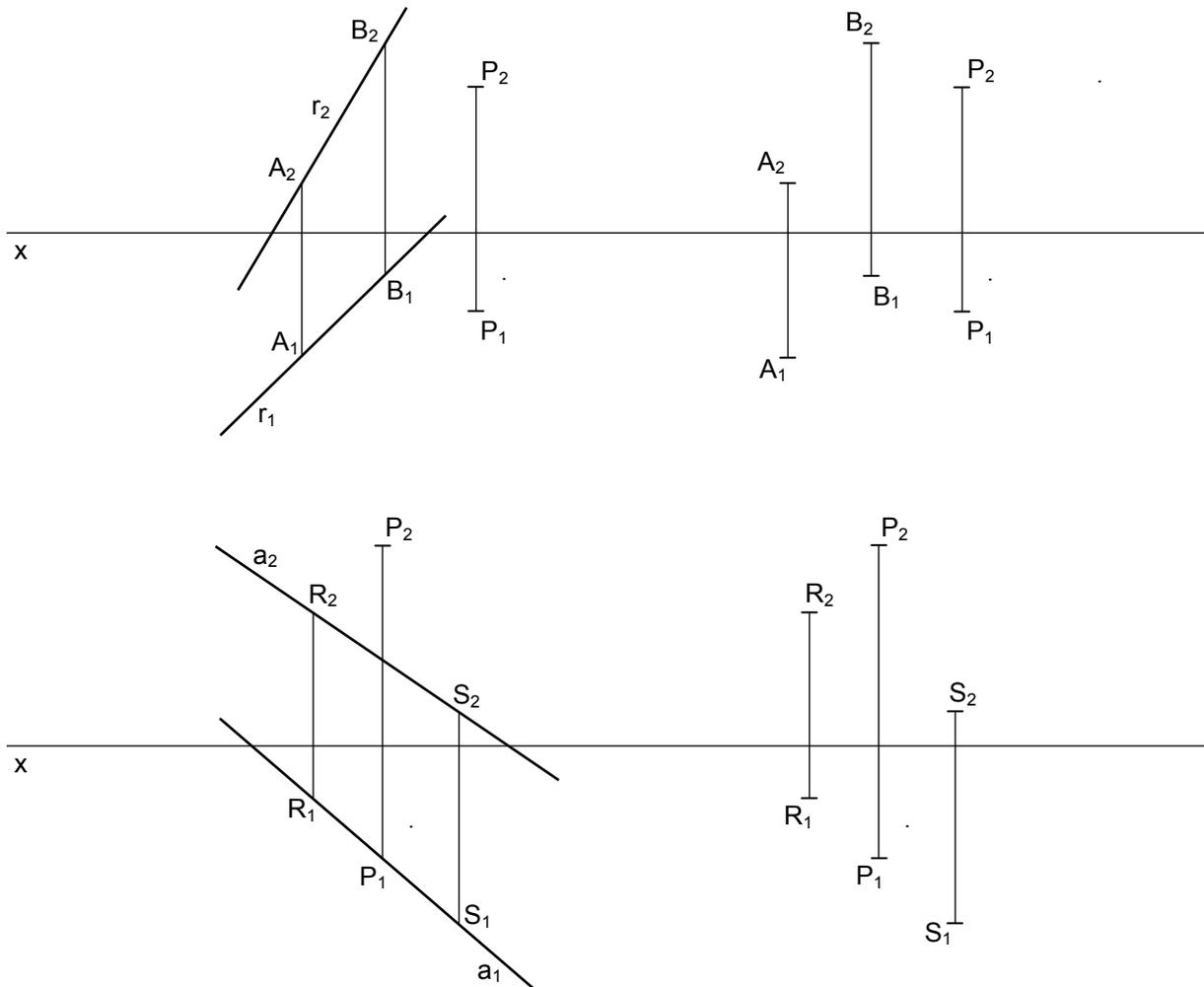
Planos definidos por uma reta e um ponto exterior

À esquerda temos retas paralelas e concorrentes que definem um plano. À direita temos o plano definido por uma reta e um ponto que não lhe pertence. Entre uma e outra representação é retirada umas das retas e substituída por um ponto seu.

Planos definidos por três pontos

Nas páginas anteriores vimos como um plano pode ser definido por duas retas paralelas ou concorrentes e por uma reta e um ponto. Aqui vemos como pode ser definido por três pontos não colineares, ou seja, que não se situem numa mesma linha reta.

Para melhor se compreender o que aqui é mostrado convém seguir a sequência desde a página 24.



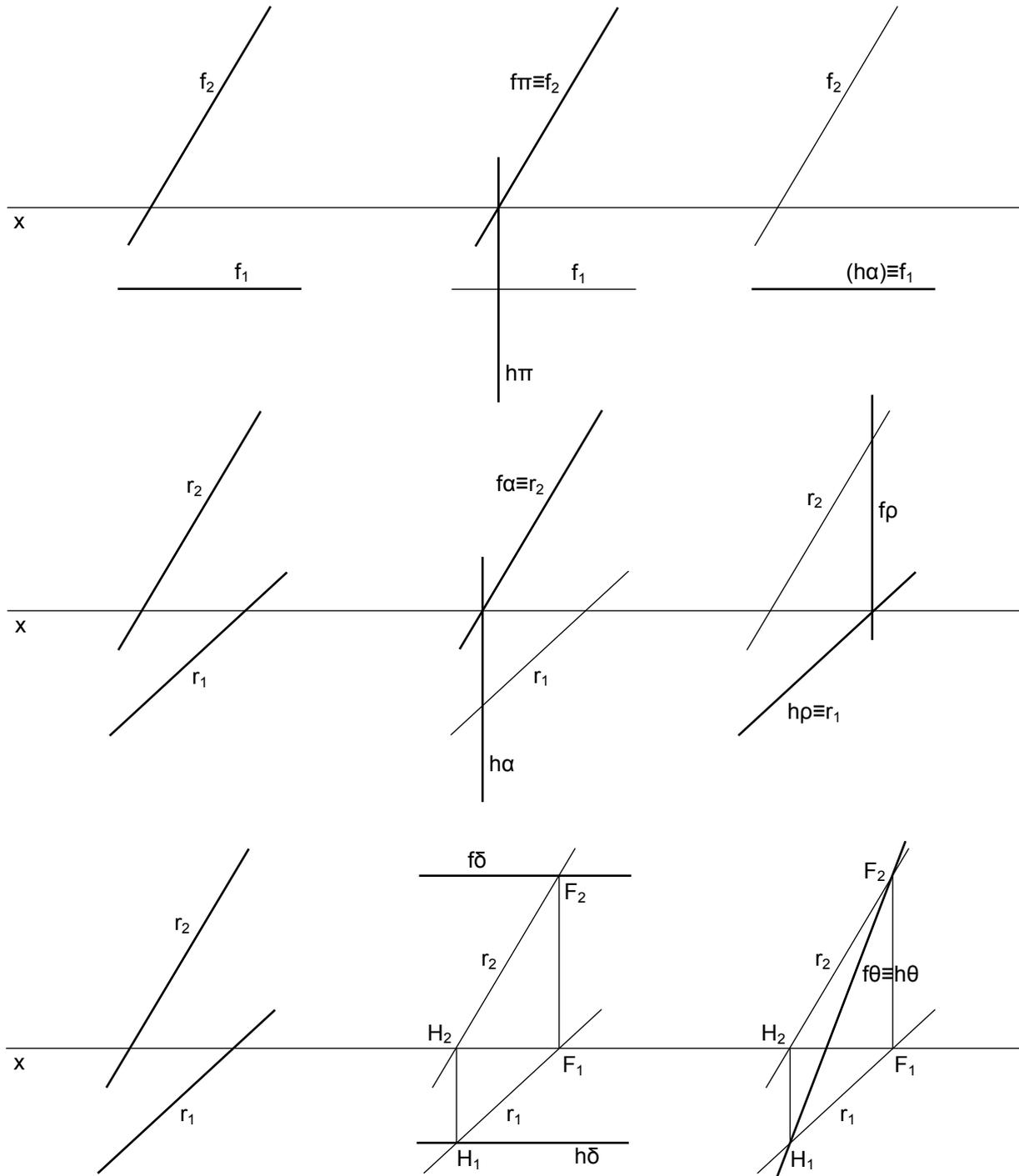
Planos definidos por pontos não colineares

À esquerda temos a representação de planos definidos por uma reta e um ponto. Se utilizarmos dois pontos da reta podemos representar o plano pelos três pontos, como se mostra à direita. De notar que, no segundo exemplo, as projeções horizontais dos pontos são colineares, o que significa que o plano que os contém é vertical.

Planos definidos por uma reta e tipo

Há casos em que basta uma reta para definir um plano, desde que se saiba qual o tipo de plano. Mostram-se aqui alguns dos vários exemplos que existem.

Para melhor compreender o que aqui é mostrado convém seguir a sequência desde a página 24.



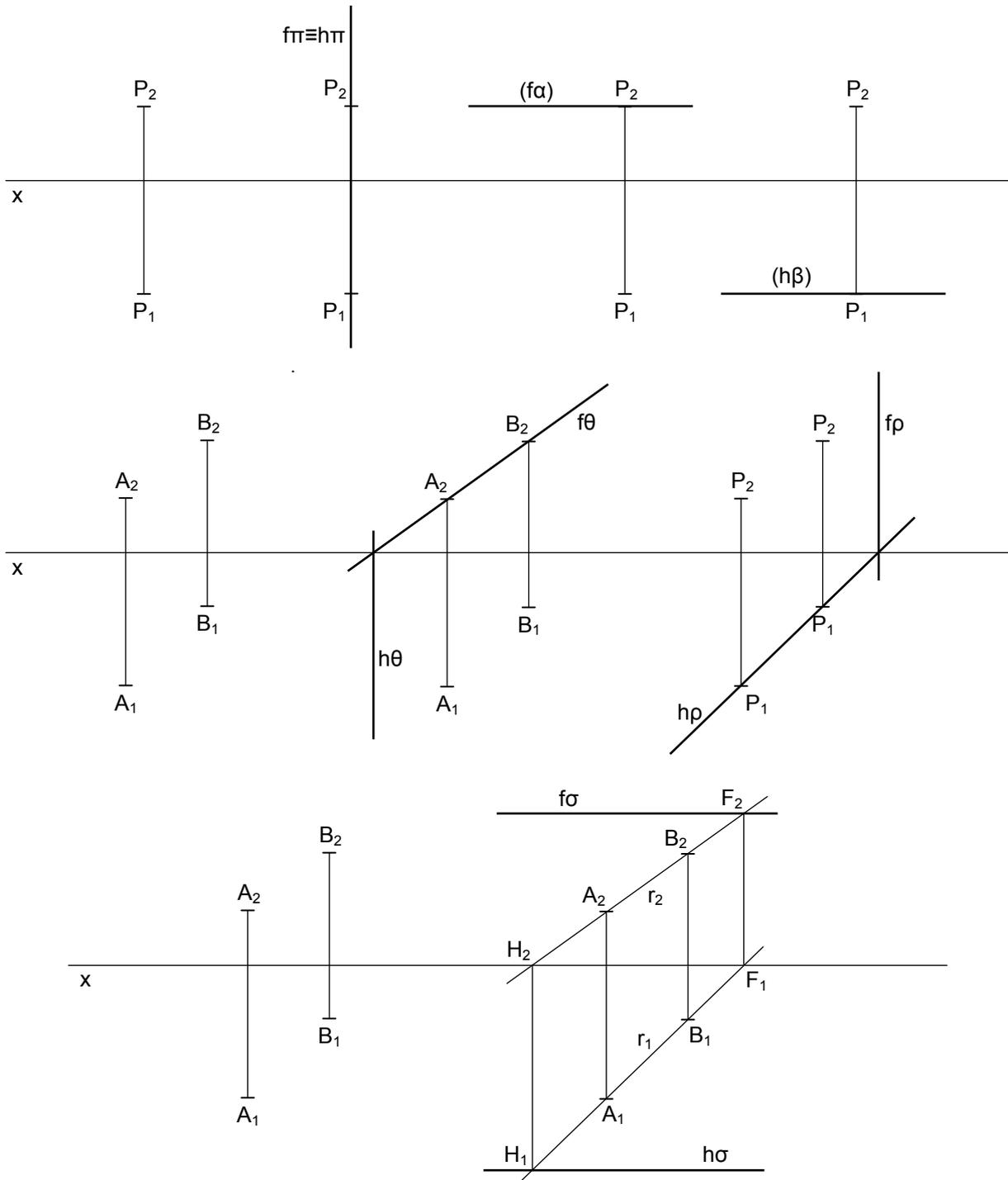
Planos definidos por uma reta e pelo seu tipo

A reta frontal pode definir um plano de topo ou um plano frontal. A reta oblíqua pode definir um plano vertical, um de topo, um de rampa ou um oblíquo perpendicular a $\beta_{2/4}$. Como se verifica, a reta que serve de referência está contida nos planos abordados.

Planos definidos por pontos e tipo

Um plano pode também ser definido por um ou dois pontos e o seu tipo, desde que saibamos que tipo de plano esse ponto define.

Para melhor compreender o que aqui é mostrado convém seguir a sequência desde a página 24.

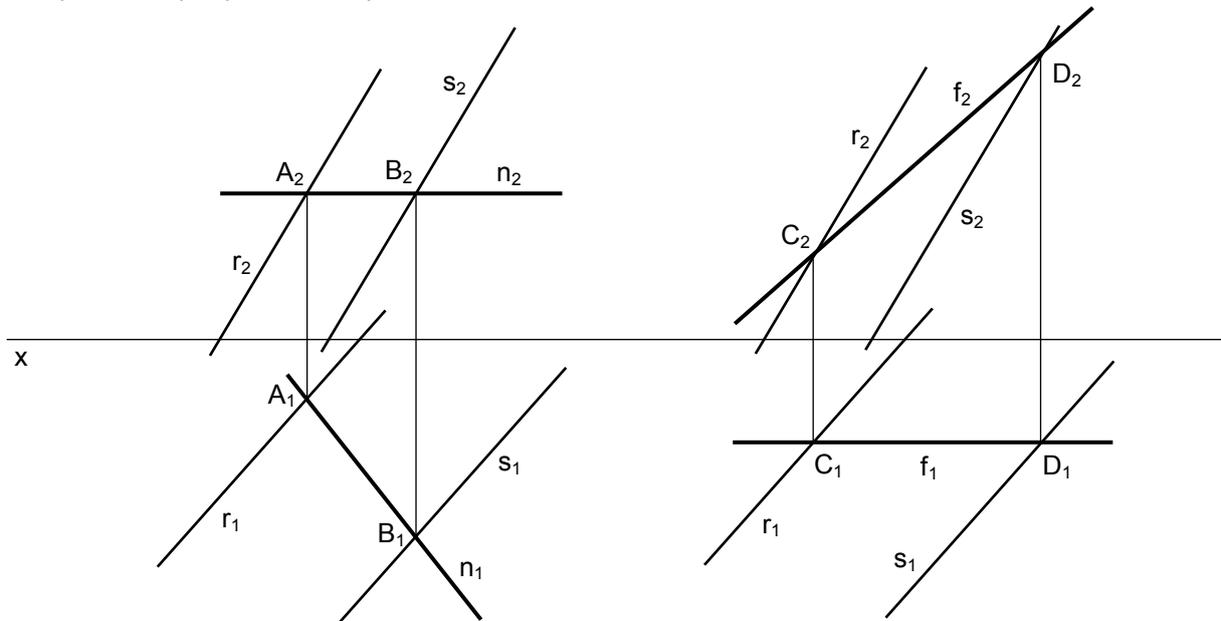


Planos definidos por um ou dois pontos e tipo

Em cima vemos como um ponto pode definir um plano de perfil, horizontal ou frontal. Em baixo vemos como dois pontos podem definir um plano vertical, de topo ou de rampa. Para provar esta última situação recorre-se a uma reta auxiliar, já que o plano de rampa não é projetante.

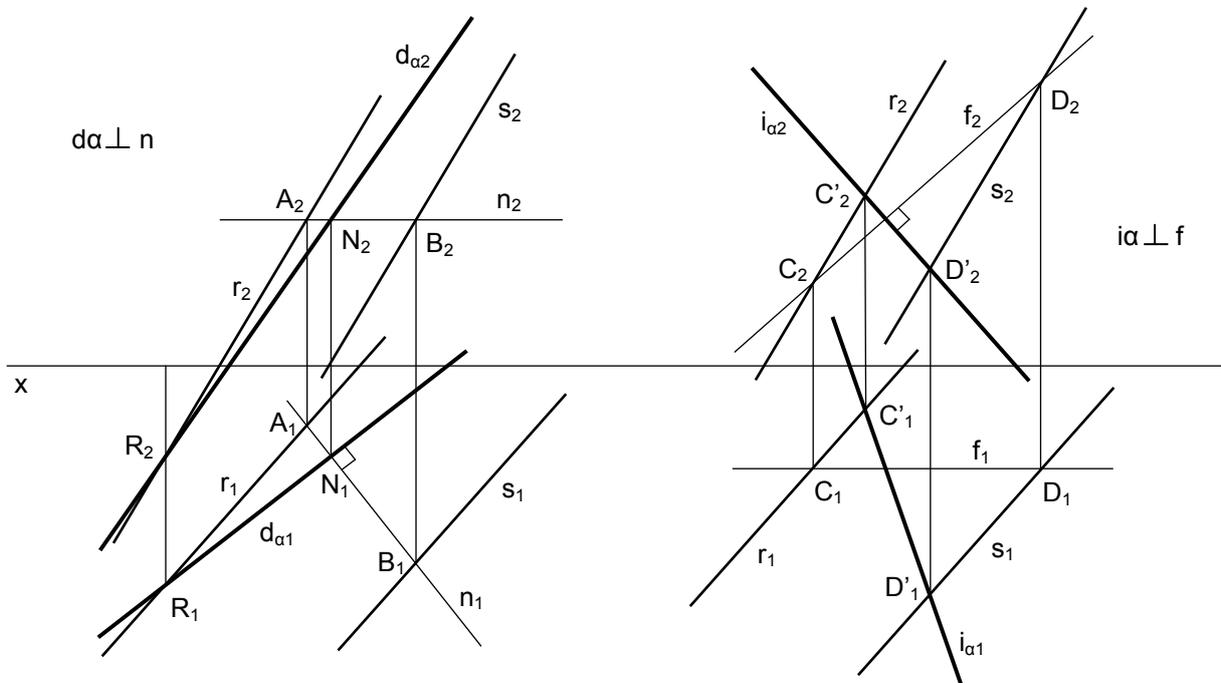
Retas notáveis em planos definidos por retas

Mostra-se aqui como se determinam retas horizontais, frontais, de maior declive e de maior inclinação em planos definidos por retas. Utiliza-se como exemplo um plano definido por retas paralelas, sendo concorrentes o processo seria igual. Se, à partida, um plano estiver definido por uma reta e um ponto, ou por pontos, há que o transformar em duas retas.



Retas horizontal e frontal em planos definidos por retas

Para traçar estas retas num plano definido por retas basta cruzá-las com essas. Uma das projeções é paralela ao eixo x, a outra resulta em função dos pontos de cruzamento.

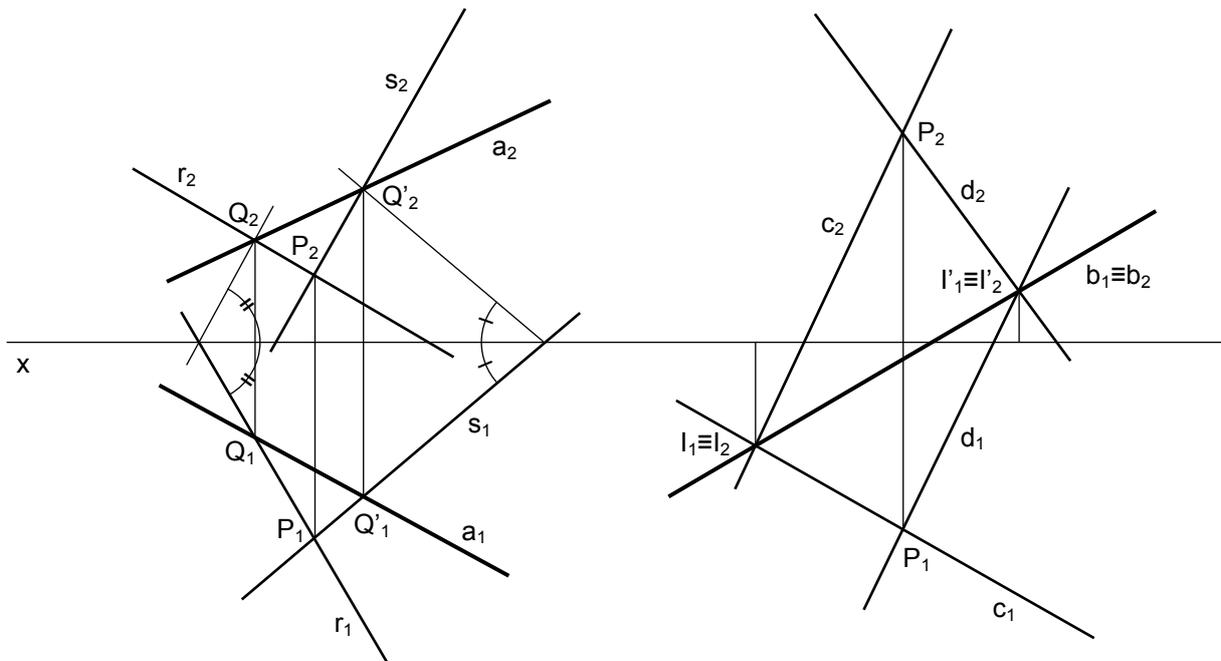


Retas de maior declive e de maior inclinação em planos definidos por retas

Para traçar estas retas é necessário, no primeiro caso, traçar uma reta horizontal, no segundo traçar uma reta frontal, uma vez que as retas pretendidas são perpendiculares a estas. Para pertencerem ao plano têm de se cruzar com duas retas dele. Repare-se que estas situações estão elaboradas com base nas anteriores.

Retas dos planos bissetores em planos definidos por retas

Aqui mostra-se como se determinam as retas que um plano definido por retas tem nos planos bissetores. Utilizam-se, como exemplos, planos definidos por retas concorrentes, sendo paralelas o processo seria igual. Se, à partida, um plano estiver definido por uma reta e um ponto, ou por pontos, há que o transformar em duas retas.



Retas do $\beta_{1/3}$ e do $\beta_{2/4}$ em planos definidos por retas

Para determinar estas retas basta determinar os pontos onde cada uma cruza o plano em causa. À esquerda, utilizando linhas simétricas a uma projeção de cada reta, encontram-se pontos dessas retas que se situam no $\beta_{1/3}$; à direita, no cruzamento das projeções das retas estão pontos do $\beta_{2/4}$. Unindo esses pontos obtêm-se as retas pretendidas.

Se não for possível determinar um ou os dois pontos das retas dadas no espaço disponível, cruza-se uma ou duas retas com essas e trabalha-se com as novas retas.

Plano – Exercícios

Traços laterais de planos

1. Representar os traços principais os seguintes planos, determinando de seguida os laterais:
 - Plano horizontal α , com 2cm de cota
 - Plano frontal π , com 3cm de afastamento
2. Representar os traços principais os seguintes planos, determinando de seguida os laterais:
 - Plano horizontal β , com -3cm de cota
 - Plano frontal ρ , com -2cm de afastamento
3. Representar os traços principais do plano vertical ω , que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa e faz 40° ad. Determinar o seu traço lateral.
4. Representar os traços principais do plano vertical θ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa e faz 30° ae. Determinar o seu traço lateral.
5. Representar os traços principais dos seguintes planos de rampa, e determinar os seus laterais:
 - Plano δ , cujos traços frontal e horizontal têm, respetivamente, 4cm de cota e 2cm de afastamento
 - Plano σ , cujos traços frontal e horizontal têm, respetivamente, 5cm de cota e -2cm de afastamento
6. Representar os traços principais dos seguintes planos de rampa, e determinar os seus laterais:
 - Plano α , cujos traços frontal e horizontal têm, respetivamente, -5cm de cota e 2cm de afastamento
 - Plano π , cujos traços frontal e horizontal têm, respetivamente, -4cm de cota e -3cm de afastamento
7. Representar os traços principais dos seguintes planos de rampa, e determinar os seus laterais:
 - Plano δ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço horizontal tem -3cm de afastamento
 - Plano ρ , paralelo ao $\beta_{1/3}$, cujo traço horizontal tem 4cm de afastamento
8. Determinar os traços laterais dos seguintes planos passantes:
 - Plano β , definido pelo ponto P(2;4;3)
 - Plano δ , definido pela reta r que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 60° ad e 30° ae, respetivamente
9. Representar o plano θ , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal cruza o eixo x num ponto com 5cm de abcissa e faz 40° ad. Determinar o seu traço lateral.
10. Representar o plano ω , que cruza o eixo x num ponto com 6cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ad e 20° ae, respetivamente. Determinar o seu traço lateral.

Marcação de pontos e de retas em planos

11. Representar o plano frontal π , com -2cm de afastamento. Marcar os seus pontos:
 - E, com 4cm de cota
 - F, com -2cm de cota
 - G, situado no plano horizontal de projeção
 - H, situado no $\beta_{1/3}$
12. Representar o plano frontal δ , com 3cm de afastamento. Determinar as suas retas:
 - v, vertical
 - f, frontal, fazendo 45° ae
 - b, fronto-horizontal, com -1cm de cota
13. Representar o plano δ do exercício anterior. Determinar as suas retas notáveis.
14. Representar o plano horizontal α , com 3cm de cota. Marcar os seus pontos:
 - A, com 2cm de afastamento
 - B, com -1cm de afastamento
 - C, situado no $\beta_{1/3}$
 - D, situado no $\beta_{2/4}$
15. Representar o plano horizontal θ , com -2cm de cota. Determinar as suas retas:
 - t, de topo
 - n, horizontal, fazendo 60° ad
 - a, fronto-horizontal, com 3cm de afastamento
16. Representar o plano θ do exercício anterior. Determinar as suas retas notáveis.
17. Representar o plano de topo ρ , que faz 50° ad e cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa. Marcar os seus pontos:
 - I(-1;2;?) K(3;0)
 - J(4;-3;?) L(-1;4)
18. Representar o plano ρ do exercício anterior. Determinar as suas retas:
 - f, frontal, com 2cm de afastamento
 - t, de topo, com -2cm de cota
 - r, oblíqua, paralela ao $\beta_{2/4}$
19. Representar o plano ρ do exercício 17. Determinar as suas retas notáveis.
20. Representar o plano vertical ω , que faz 35° ae e cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa. Marcar os seus pontos:
 - M, com 3cm de abcissa
 - N, com 2cm de cota, situado no $\beta_{1/3}$
 - O(-1;3) P(-4;0)
21. Representar o plano ω do exercício anterior. Determinar as seguintes suas retas:
 - v, vertical, com 5cm de abcissa
 - n, horizontal, com -1,5cm de cota
 - s, oblíqua, paralela ao $\beta_{1/3}$

Marcação de pontos e de retas em planos (Continuação)

22. Representar o plano ω do exercício 20. Determinar as suas retas, a e b, dos planos bissetores.

23. Representar o plano de perfil α com uma abcissa qualquer. Marcar os seus pontos:

- Q(-3;-4)
- R, com 2,5cm de afastamento, situado em v_0
- S, com 2cm de cota, situado no $\beta_{1/3}$
- T, com -5cm de cota, situado no $\beta_{2/4}$

24. Representar o plano α do exercício anterior. Determinar as suas retas:

- t, de topo, com 4cm de cota
- v, vertical, com -2cm de afastamento
- p, passante, contendo o ponto P(5;3)

25. Representar o plano α do exercício 23. Determinar as suas retas, a e b, dos planos bissetores.

26. Representar o plano de rampa σ , cujos traços frontal e horizontal têm 3cm de cota e 4cm de afastamento. Determinar os seus pontos:

- A, situado em φ_0
- B, com 1cm de cota
- C, com 5cm de afastamento
- D, com -1,5cm de afastamento

27. Representar o plano σ do exercício anterior. Determinar as suas retas:

- p, de perfil
- a, do $\beta_{1/3}$

28. Representar o plano σ do exercício 26. Determinar o seu traço lateral e, através dele, os seus pontos:

- E(2;?)
- F(5;-1;?)
- G(-2;?;5)

29. Representar o plano de rampa π , cujos traços frontal e horizontal têm 5cm de cota e -3cm de afastamento. Determinar as suas retas:

- b, com 1cm de afastamento
- c, notável do $\beta_{2/4}$

30. Representar o plano oblíquo α , cujos traços frontal e horizontal fazem 50° ad e 35° ad, respetivamente, cruzando o eixo x num ponto com 3cm de abcissa. Determinar os seus pontos.

- J(2;0)
- K(0;5)
- L(3;2)
- M(-6;4;?)

31. Representar o plano α do exercício anterior. Determinar as suas retas:

- f, frontal, com 2cm de afastamento
- f', frontal, com -3cm de afastamento
- p, de perfil, com -2cm de abcissa

32. Representar o plano α do exercício 30. Determinar as suas retas:

- r, oblíqua, que passa pelos diedros I, II e III
- p, de perfil, passante

33. Representar o plano α do exercício 30. Determinar as retas notáveis desse plano.

34. Representar o plano α do exercício 30. Determinar as suas retas que se cruzam no ponto P(2;2):

- d_α , reta de maior declive
- i_α , reta de maior inclinação

35. Representar o plano oblíquo ρ , cujos traços frontal e horizontal fazem 65° ad e 40° ae, cruzando o eixo x num ponto com -2cm de abcissa. Determinar os seus pontos:

- N(2;3)
- O(-2;2)
- P(-5;1;?)

36. Representar o plano ρ do exercício anterior. Determinar as suas retas:

- p, de perfil, que passe nos diedros I, IV e III
- f, frontal, com -2cm de afastamento

37. Representar o plano ρ do exercício 35. Determinar as suas retas, a e b, dos planos bissetores.

38. Representar o plano ρ do exercício 35. Determinar as suas retas:

- d_ρ , reta de maior declive
- i_ρ , reta de maior inclinação

Marcação de retas e de pontos em planos definidos por retas e por pontos

39. Representar o plano α definido pela sua reta de maior inclinação i_α , que contém o ponto P(3;2), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 45° ae e 60° ad, respetivamente. Determinar as suas retas e pontos:

- f, frontal, com 4cm de afastamento
- n, horizontal com 3cm de cota
- A(6;3)
- B(4;-3)

40. Representar o plano π definido pela sua reta de maior declive d_π , que contém o ponto R(-2;2;4), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 40° ad e 65° ae, respetivamente. Determinar as suas retas e pontos:

- n, horizontal com 6cm de cota
- p, de perfil com -1cm de abcissa
- a, do $\beta_{1/3}$

41. Representar o plano β definido pelas retas paralelas, a e b, cada uma contendo um ponto homónimo A(3;6;2) e B(-2;-1;4), fazendo as suas projeções frontais e horizontais 55° ad e 35° ae, respetivamente. Determinar os seus pontos:

- P(2,5;4)
- Q(4;-7)

42. Representar o plano θ definido pelos pontos A(-3;-3;-1), B(4;6;1) e C(0;4;-2). Determinar as suas retas e ponto:

- b, do $\beta_{2/4}$
- h_θ , traço horizontal
- R(4;0)

43. Representar o plano δ definido pelos pontos J(1;4;6), K(4;-3;3) e L(-3;-2;-1). Determinar as suas retas:

- n, horizontal com 3cm de cota
- d_δ , reta de maior declive contendo o ponto J
- p, de perfil contendo o ponto L