MATEMÁTICA A - 12º Ano
Probabilidades - Distribuição binomial
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como a variável X segue distribuição binomial, na repetição independente de 10 provas da mesma experiência, temos que, a probabilidade do sucesso é a probabilidade de ocorrência do acontecimento definido, ou seja, a probabilidade de que a soma das duas bolas retiradas seja 7, em cada uma das repetições da experiência aleatória.
   Como existem 9 bolas no saco, existem ${}^9C_2$ pares de bolas, que se podem retirar simultaneamente, ou seja, o número de casos possíveis em cada realização da experiência. O número de casos favoráveis é 3 (correspondentes às somas 1+6, 2+5 e 3+4), pelo que a probabilidade é

   $$p = \frac{3}{{}^9C_2} = \frac{1}{12}$$

   A ocorrência de n sucessos, implica a ocorrência de $10 - n$ insucessos, pelo que $\frac{11}{12}$, é a probabilidade do insucesso, ou seja, a probabilidade de que não ocorra a soma 7, em cada uma das realizações da experiência aleatória.

   A expressão ${}^{10}C_n$ permite considerar que os n sucessos esperados ocorram em qualquer conjunto de n experiências, no universo das 10 realizações, ou seja, o número de posições diferentes na sequência de 10 realizações, em que podem ocorrer os n sucessos.

   Exame – 2015, Ép. especial

2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$.

   Temos que:

   - $n = 8$ (o dado é lançado 8 vezes de forma independente).
   - $p = \frac{1}{6}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair a face com o número 1*» é $\frac{1}{6}$, porque o dado tem 6 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
   - $q = \frac{5}{6}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

   Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1 sair pelo menos duas vezes, e arredondando o resultado às décimas, temos:

   $$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big) =$$

   $$= 1 - \left({}^8C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + {}^8C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7\right) = 1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^8 + 8 \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7\right) \approx 0,4$$

   Teste Intermédio 12º ano – 29.11.2013

3. Como as sucessivas extrações das bolas são feitas repondo a bola extraída anteriormente, cada repetição da experiência é feita de forma independente das restantes.
   Definindo o acontecimento ≪*registar número múltiplo de 3*≫ como sucesso, este acontecimento tem probabilidade não nula em cada repetição da experiência e como as repetições são independentes, a probabilidade é constante em cada uma delas.

   Assim, para a aplicação do modelo binomial $\left(P(X = k) =^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$, como o João fará extrações sucessivas até ter registado 8 elementos, temos que a experiência será repetida 8 vezes ($n = 8$).
   Como definimos o acontecimento ≪*registar número múltiplo de 3*≫ como sucesso, temos que a probabilidade é $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das 12 bolas, 4 são múltiplos de 3: $M_3 = \{3, 6, 9, 12\}$).
   Logo a probabilidade do insucesso é $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
   Como se pretende calcular a probabilidade de que nas 8 experiências, sejam registados exatamente 5 vezes números múltiplos de 3, temos que $k = 5$.

   Assim, temos que:

$$P(X = 5) =^8 C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times^8 C_5$$

Exame – 2013, Ép. especial

4. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente (porque se repõe a bola na caixa após cada extração), a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X = k) =^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$.

   Temos que:

   - $n = 5$ (a experiência é efetuada cinco vezes).
   - $p = \frac{2}{5}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja "*Sair bola preta*"é $\frac{2}{3}$, porque existem 2 bolas pretas na caixa, num total de 3)
   - $q = \frac{1}{3}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

   Assim, calculando a probabilidade da ser extraída bola preta, pelo menos, quatro vezes, temos:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) =^5 C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 +^5 C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 =$$

$$= 5 \times \frac{2^4}{3^4} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2^5}{3^5} \times 1 = \frac{5 \times 2^4 \times 1}{3^5} + \frac{2^5}{3^5} = \frac{5 \times 2^4 + 2^5}{3^5} = \frac{112}{243}$$

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

5. Usando o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$, temos que $n=5$.

   Para o acontecimento I, $p=q=\frac{1}{2}$ e $k=2$.

   Para o acontecimento J, $p=\frac{1}{6}$, pelo que $q=\frac{5}{6}$ e $k=2$.

   Assim, temos que:

   - $P(I) = P(X=2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} \approx 0,31$
   - $P\left(\overline{I}\right) = 1 - P(I) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \approx 0,69$
   - $P(J) = P(Y=2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \left(\frac{5^3}{6^5}\right) \approx 0,16$
   - $P\left(\overline{J}\right) = 1 - P(J) = 1 - \frac{10 \times 5^3}{6^5} \approx 0,84$

   Logo o acontecimento mais provável é o acontecimento $\overline{J}$.

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Ép. especial

6. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$.

   Temos que:

   - $n=3$ (o dado é lançado 3 vezes de forma independente).
   - $p=\frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair a face com o número 1*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem 4 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
   - $q=\frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

   Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1, ocorrer 0,1,2 ou 3 vezes, temos:

   - $P(X=0) = {}^3 C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
   - $P(X=1) = {}^3 C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2^2}{3^2} = \frac{3 \times 1 \times 2^2}{3^3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$
   - $P(X=2) = {}^3 C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 1 \times 2}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$
   - $P(X=3) = {}^3 C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{3^3} \times 1 = \frac{1}{27}$

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Exame – 2011, Prova especial

7. Como a experiência ≪*Um jovem compra o bilhete*≫ se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de jovens que usa o multibanco no pagamento*≫, segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

   Temos que:

   - $n = 9$ (serão comprados bilhetes 9 vezes de forma independente).
   - $p = 0,6$ (é a probabilidade do sucesso, ou seja "*O jovem usa o multibanco no pagamento*")
   - $q = 0,4$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0,6 = 0,4$

   Assim, calculando da ocorrência de 6 sucessos ($k = 6$) no conjunto das 9 repetições da experiência, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

   $$P(X=6) = {}^9C_6\,(0,6)^6\,(0,4)^3 \approx 0,25$$

   Exame – 2011, 1ª Fase

8. Como a experiência ≪*Lançar um dado*≫ se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de vezes que saí face 4*≫, segue o modelo binomial

   $$\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$$

   Como $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$, temos que:

   $$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14} = 1 - \left({}^{15}C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{15} + {}^{15}C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}\right) =$$

   $$= 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right) = 1 - P(X < 2) = P(X \geq 2)$$

   Ou seja, e expressão apresentada é o valor da probabilidade do acontecimento: ≪*A face 4 sai pelo menos duas vezes*≫.

   Resposta: **Opção B**

   Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

9. Como a experiência ≪*O Zé Mão Quente executa um lançe livre*≫ se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de concretiza o lance livre, num conjunto de 8 lançamentos*≫, segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

   Como $n = 8$, considerando como sucesso o acontecimento ≪*Concretizar o lance livre*≫, vem $p = 0,9$ e $q = 0,1$, temos que:

   $$1 - 0,9^8 - {}^8C_7 \times 0,9^7 \times 0,1 = 1 - \left({}^8C_8(0,9)^8(0,1)^0 + {}^8C_7(0,9)^7(0,1)^1\right) =$$

   $$= 1 - \left(P(X=8) + P(X=7)\right) = 1 - P(X \geq 7) = P(X < 7) = P(X \leq 6)$$

   Ou seja, e expressão apresentada é o valor da probabilidade do acontecimento: ≪*O Zé Mão Quente concretiza no máximo seis lances livres*≫.

   Resposta: **Opção C**

   Teste Intermédio 12º ano – 04.12.2009

10. Como a experiência ≪*Lançar um dado*≫ se repete cinco vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de vezes que saí face 2*≫, segue o modelo binomial

    $$\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$$

    Como $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$, temos que:

    $$P(X=2) = {}^5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,16$$

    Resposta: **Opção B**

    Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

11. Como a experiência ≪*Sair um boneco*≫ se repete sete vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de vezes que saí Rato Mickey*≫, segue o modelo binomial

$$\left(P(X=k) = ^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$$

Como $n=7$, $p=\dfrac{1}{3}$ (porque cada um dos 3 bonecos tem igual probabilidade de sair) e $q=\dfrac{2}{3}$, temos que:

$$P(X=2) = ^7 C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-2} = ^7 C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 1ª Fase – 2ª chamada (prog. antigo)

12. Como a experiência ≪*Lançar um dado*≫ se repete cinco vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de vezes que saí face seis*≫, segue o modelo binomial

$$\left(P(X=k) = ^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$$

Como $n=5$, $p=\dfrac{1}{6}$ e $q=\dfrac{5}{6}$, temos que:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - ^5 C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, 1ª Fase – 1ª chamada (progr. antigo)

13. Como a experiência ≪*Lançar a moeda*≫ se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de vezes que saí a face escudo*≫, segue o modelo binomial

$$\left(P(X=k) = ^n C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$$

Como $n=10$, $p=\dfrac{1}{2}$ e $q=\dfrac{1}{2}$, temos que:

$$P(X=4) = ^{10} C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = ^{10} C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{4+6} = ^{10} C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Resposta: **Opção A**

Prova modelo – 1998 (progr. antigo)