MATEMÁTICA A - 12º Ano
Funções - Exponenciais e logaritmos
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como o ponto P pertence ao gráfico de f, substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, temos que

$$8 = e^{a \ln 2} \Leftrightarrow 8 = \left(e^{\ln 2}\right)^a \Leftrightarrow 8 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 8 \Leftrightarrow a = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

2.

2.1. Calculando as imagens dos objetos 20 e 10, temos

$$N(20) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 20}} = \frac{200}{1+50e^{-5}} \approx 149,60$$

$$N(10) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 10}} = \frac{200}{1+50e^{-2,5}} \approx 39,18$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10,20]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[10,20]} = \frac{N(20)-N(10)}{20-10} \approx \frac{149,60-39,18}{10} \approx \frac{107,42}{10} \approx 10,742 \approx 11$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que entre os anos de 1900 e 2000 o número de habitantes, da região do globo em causa, cresceu em média aproximadamente 11 milhões em cada década.

2.2. Resolvendo em ordem a t, temos:

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow 1+50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - \frac{N}{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200-N}{N} \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200-N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)}{-0,25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\frac{25}{100}}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{100}{25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -4\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^{4}$$

Exame – 2015, Ép. especial

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a\left(a^2b\right) = \log_a(a^2) + \log_a b = 2\log_a a + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2\times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2+3 = 5$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2015, 2ª Fase

4. Para $x \in]-\infty, 3]$, $f(x) = 1 + xe^x$, logo, vem que

$$f(x) - 2x > 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + xe^x - 2x > 1 \;\Leftrightarrow\; xe^x - 2x > 0 \;\Leftrightarrow\; x(e^x - 2) > 0$$

Determinando as soluções da equação $x(e^x-2)=0$, temos:

$$x(e^x - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee e^x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee e^x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = \ln 2$$

Estudando a variação do sinal de $x(e^x-2)$, em $]-\infty,3]$, vem:

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$e^x - 2$	-	-	-	0	$+$	$+$
$x(e^x-2)$	$+$	0	-	0	$+$	$+$

Assim, como $f(x) - 2x > 1 \;\Leftrightarrow\; x(e^x - 2) > 0$, temos que o conjunto solução de $f(x) - 2x > 1$ é

$$C.S. =]-\infty, 0[\cup]\ln 2, 3]$$

Exame – 2015, 2ª Fase

5. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3(3^k) - \log_3 9 = k\times\log_3 3 - 2 = k - 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1ª Fase

6. A distância do centro da esfera ao ponto P, no momento em que se inicia o movimento, em centímetros, é

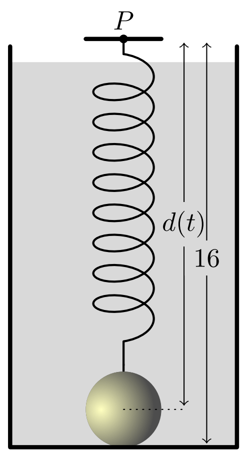
$$d(0) = 10 + (5-0)e^{-0,05\times 0} = 10 + (5)e^0 = 10 + 5\times 1 = 15$$

Como, no momento em que se inicia o movimento, o ponto da esfera mais afastado do ponto P está a 16 cm (do ponto P), o raio da esfera, em centímetros, é

$$r = 16 - d(0) = 16 - 15 = 1$$

Pelo que, calculando o volume da esfera em cm^3, e arredondado o resultado às centésimas, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\times 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19$$



Exame – 2015, 1ª Fase

7. Como $10^2 = 100 \;\Leftrightarrow\; \log_{10} 100 = 2$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log(100b) = \log 100 + \log b = 2 + 2014 = 2016$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014

8. Simplificando a condição $\ln(e^{-x}-a) \leq 0$, como a função logarítmica tem imagens não positivas para $x \in]0,1]$, temos:

$\ln(e^{-x}-a) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < e^{-x}-a \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}-a > 0 \;\wedge\; e^{-x}-a \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} > a \;\wedge\; e^{-x} \leq 1+a \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; -x > \ln(a) \;\wedge\; -x \leq \ln(1+a) \;\Leftrightarrow\; x < -\ln(a) \;\wedge\; x \geq -\ln(1+a)$

Assim, $S = [-\ln(1+a), -\ln(a)[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, Ép. especial

9. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a\left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b} = \log_a\left(a^5\right) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a\left(b^{\frac{1}{3}}\right) + b =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2ª Fase

10. Usando as propriedades dos logaritmos, e sabendo que $log_a b = 2$, temos que

$$\log_b a + \log_a \sqrt{b} = \frac{\log_a a}{\log_a b} + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 28.02.2013

11.

11.1. Designando por A o centro do balão A, por B o centro do balão B e por P um ponto com a mesma altura do balão A, situado na perpendicular ao solo em que está o balão B, temos que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P, e pretendemos calcular $\overline{AB}$

Assim, temos que $\overline{AP} = 7$ e $\overline{BP} = b(5) - a(5)$

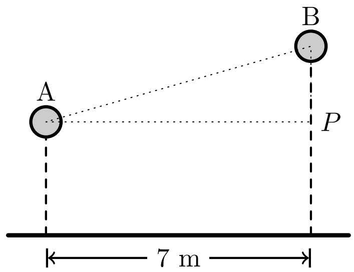
Calculado $b(5)$ e $a(5)$, temos

$$b(5) = 6e^{-0,06\times 5} - 0,02 \times 5 + 2 = 6e^{-0,3} - 0,1 + 2 \approx 6,345$$

$$a(5) = e^{-0,03\times 5} - 0,02 \times 5 + 3 = e^{-0,15} - 0,1 + 3 \approx 3,761$$

E assim, vem que

$$\overline{BP} = b(5) - a(5) \approx 2,584$$



E assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vem $\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$:

$$\overline{AB}^2 = 7^2 + 2,584^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{AB}^2 = 55,677 \;\Rightarrow\; \overline{AB} = \sqrt{55,677} \;\Rightarrow\; \overline{AB} \approx 7,5 \text{ m}$$

11.2. Calculando o tempo decorrido entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo, em segundos, temos:

$$a(t) = b(t) \Leftrightarrow e^{-0,03t} - 0,02t + 3 = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2 \Leftrightarrow e^{-0,03t} + 3 = 6e^{-0,06t} + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6e^{-0,06t} + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6e^{2\times(-0,03t)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6\left(e^{-0,03t}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -6\left(e^{-0,03t}\right)^2 + e^{-0,03t} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,03t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow -6y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-6)(1)}}{2(-6)} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm 5}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{-6}{-12} \vee y = \frac{4}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{3}$$

Como $y = e^{-0,03t}$, temos que:

$$e^{-0,03t} = \frac{1}{2} \vee e^{-0,03t} = -\frac{1}{3}$$

E como a equação $e^{-0,03t} = -\frac{1}{3}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,03t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,03t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 2}{-0,03} \Leftrightarrow t = \frac{0 - \ln 2}{-0,03} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,03}$$

Assim, arredondado o resultado às unidades, temos $t \approx 23$ s

Teste Intermédio 12º ano – 28.02.2013

12. Como

$$\log_a \sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow \log_a (c)^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a c = 3 \Leftrightarrow \log_a c = 6$$

e $\log_a b = c$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a \sqrt{b \times c} = \log_a (b \times c)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a (b \times c) = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) = \frac{1}{2}(c+6) = \frac{c+6}{2} = \frac{c}{2} + 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, Ép. especial

13. Resolvendo a equação $f(x) = 0$, temos que

$$e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 4e^{-x} - 4}{e^2} = 0 \underset{e^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \times e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4e^x}{e^x} = 0 \underset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \vee y = 2 - 2\sqrt{2}$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$$

E como $2 - 2\sqrt{2} < 0$, a equação $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é impossível, pelo que podemos determinar o valor do único zero da função f:

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$$

Exame – 2012, 1ª Fase

14. Usando as propriedades dos logaritmos, e como $b = a^\pi \Leftrightarrow \log_a b = \pi$, temos que

$$\log_a\left(a^{12}\times b^{100}\right) = \log_a\left(a^{12}\right)+\log_a\left(b^{100}\right) = 12\times\log_a(a)+100\times\log_a(b) = 12\times 1+100\times\pi = 12+100\pi \approx 326$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 24.05.2012

15.

15.1. Como $f(x) = 2+\log_3 x$, então

$$f(x) \geq 4+\log_3(x-8) \Leftrightarrow 2+\log_3 x \geq 4+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq 4-2+\log_3(x-8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x \geq 2+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 9+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3\left(9\times(x-8)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 9\times(x-8) \Leftrightarrow x \geq 9x-72 \Leftrightarrow x-9x \geq -72 \Leftrightarrow -8x \geq -72 \Leftrightarrow 8x \leq 72 \Leftrightarrow x \leq 9$$

Mas como $\log_3(x)$ só está definido para $x > 0$, então a expressão $2+\log_3 x \geq 4+\log_3(x-8)$ só está definida se $x > 0 \wedge x-8 > 0$, ou seja, se $x > 0 \wedge x > 8$

Pelo que a condição $f(x) \geq 4+\log_3(x-8)$ é verdadeira para os valores de x tais que $x \leq 9 \wedge x > 8$, ou seja, no intervalo

$$]-\infty,9]\cap]8,+\infty[=]8,9]$$

15.2. Calculando o valor de $f(36^{1000})-f(4^{1000})$, temos que

$$f(36^{1000})-f(4^{1000}) = 2+\log_3\left(36^{1000}\right)-\left(2+\log_3\left(4^{1000}\right)\right) = 2+1000\log_3(36)-2-1000\log_3(4) =$$

$$= 1000\log_3(36)-1000\log_3(4) = 1000\left(\log_3(36)-\log_3(4)\right) = 1000\log_3\frac{36}{4} =$$

$$= 1000\log_3 9 = 1000\times 2 = 2000$$

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012

16. Calculando o número de frangos infetados no instante em que o vírus foi detetado ($x = 0$), temos:

$$f(0) = \frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1(0)}} = \frac{200}{1+3\times 2^3} = \frac{200}{1+3\times 8} = \frac{200}{1+24} = \frac{200}{25} = 8$$

O número de dias passados, em que o número de frangos infetados era dez vezes maior ($10\times 8 = 80$), é a solução da equação $f(x) = 80$:

$$f(x) = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1x}} = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{80} = 1+3\times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow 2,5-1 = 3\times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,5}{3} = 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow 0,5 = 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow \log_2 0,5 = 3-0,1x \Leftrightarrow \log_2\frac{1}{2} = 3-0,1x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{-1} = 3-0,1x \Leftrightarrow -1-3 = -0,1x \Leftrightarrow -4 = -\frac{1}{10}x \Leftrightarrow 40 = x$$

Ou seja, desde que o vírus foi detetado, até que o número de frangos infetados fosse dez vezes maior, passaram 40 dias.

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012

17.

17.1. Sabendo que $M=7,1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M=\frac{2}{3}\log_{10}(E)-2,9$:

$$7,1=\frac{2}{3}\log_{10}(E)-2,9 \Leftrightarrow \frac{(7,1+2,9)\times 3}{2}=\log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E)=15 \Leftrightarrow E=10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E=M_0\times 1,6\times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$10^{15}=M_0\times 1,6\times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1,6\times 10^{-5}}=M_0 \Leftrightarrow M_0=0,625\times 10^{15}\times 10^{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0=6,25\times 10^{-1}\times 10^{20} \Leftrightarrow M_0=6,25\times 10^{19}$$

17.2. Sabemos que $M_1-M_2=\frac{2}{3}$.
Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.
Assim, temos que $M_1=\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2,9$ e $M_2=\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2,9$, pelo que
$M_1-M_2=\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2,9-\left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2,9\right)$
Logo:

$$\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2,9-\left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2,9\right)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2,9-\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)+2,9=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\Big(\log_{10}(E_1)-\log_{10}(E_2)\Big)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_{10}(E_1)-\log_{10}(E_2)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2}=10^1 \Leftrightarrow E_1=10\times E_2$$

Assim, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.

Exame – 2011, Prova especial

18. Como a máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível, logo a quantidade de combustível que existia no depósito no momento inicial era a quantidade medida ao fim de 20 minutos acrescida dos 2 litros consumidos, ou seja,

$$Q(0)=Q(20)+2 \Leftrightarrow Q(0)-Q(20)=2$$

Logo, determinando o valor de k, temos que

$$Q(0)-Q(20)=2 \Leftrightarrow 12+\log_3(81-k\times 0^2)-\big(12+\log_3(81-k\times 20^2)\big)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12+\log_3(81-0)-12-\log_3(81-400k)=2 \Leftrightarrow \log_3(81)-\log_3(81-400k)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-\log_3(81-400k)=2 \Leftrightarrow -\log_3(81-400k)=2-4 \Leftrightarrow \log_3(81-400k)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^2=81-400k \Leftrightarrow 400k=81-3^2 \Leftrightarrow k=\frac{72}{400} \Leftrightarrow k=\frac{9}{50}$$

Exame – 2011, Ép. especial

19.

19.1. Começamos por calcular o número de nenúfares, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, no lago A, ou seja, aos zero dias:

$$N_A(0) = \frac{120}{1+7\times e^{-0,2\times 0}} = \frac{120}{1+7\times e^{0}} = \frac{120}{1+7\times 1} = \frac{120}{8} = 15$$

Calculando o número aproximado de nenúfares, no lago A, 7 dias depois, temos:

$$N_A(7) = \frac{120}{1+7\times e^{-0,2\times 7}} = \frac{120}{1+7\times e^{-1,4}} \approx 44,02$$

Assim temos que o aumento do número de nenúfares, no lago A, nos primeiros 7 dias, arredondado às unidades é

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44,02 - 15 \approx 29 \text{ nenúfares}$$

19.2. O número de dias necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A seja igual ao número de nenúfares existentes no lago B é a solução da equação $N_A(t) = N_B(t)$:

$$N_A(t) = N_B(t) \Leftrightarrow \frac{120}{1+7\times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1+50\times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120\left(1+50\times e^{-0,4t}\right) = 150\left(1+7\times e^{-0,2t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 120+6000\times e^{-0,4t} = 150+1050\times e^{-0,2t}\ \Leftrightarrow\ 6000\times e^{-0,4t} - 1050\times e^{-0,2t} + 120 - 150 = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 6000\times\left(e^{-0,2t}\right)^2 - 1050\times e^{-0,2t} - 30 = 0\ \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,2t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow\ 6000y^2 - 1050y - 30 = 0\ \Leftrightarrow\ y = \frac{1050 \pm \sqrt{(-1050)^2 - 4(6000)(-30)}}{2(6000)}\ \Leftrightarrow\ y = \frac{1050 \pm 1350}{12\,000}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{40}\ \vee\ y = \frac{1}{5}$$

Como $y = e^{-0,2t}$, temos que:

$$e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}\ \vee\ e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$$

E como a equação $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5}\ \Leftrightarrow\ -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right)\ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0,2}\ \Leftrightarrow\ t = \frac{0-\ln 5}{-0,2}\ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln 5}{0,2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos $t \approx 8$ dias

Exame – 2011, 2ª Fase

20. Resolvendo a equação $\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3}$, no intervalo $[1,+\infty[$, temos que

$$\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{xe^{-x}+2x}{x} = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x(e^{-x}+2)}{x} = e^x - \frac{2}{3} \underset{x>1}{\Leftrightarrow} e^{-x}+2 = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + 2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3e^x} - \frac{3e^x \times e^x}{3e^x} + \frac{8e^x}{3e^x} = 0 \underset{3e^x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3(e^x)^2 + 8e^x = 0 \Leftrightarrow -3(e^x)^2 + 8e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow -3y^2 + 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-3)(3)}}{2(-3)} \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm 10}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{2}{-6} \vee y = \frac{-18}{-6} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \vee y = 3 \Leftrightarrow$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -\frac{1}{3}}_{\text{Eq. Imp.}} \vee e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

Assim, a única solução da equação, em $[1,+\infty[$, é $\ln 3$

Teste Intermédio 12º ano – 26.05.2011

21. Como o ponto P pertence ao gráfico da função f e tem ordenada $\frac{1}{2}$, então podemos calcular a sua abcissa recorrendo à expressão algébrica da função f:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

22. Resolvendo a inequação, temos

$$\log_3(7x+6) \geq 2 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x+6) \geq \log_3 9 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x+6) \geq \log_3(9 \times x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x+6 \geq 9x \Leftrightarrow 7x - 9x \geq -6 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow x \leq 3$$

Mas como $\log_3(x)$ só está definido para $x > 0$, então a expressão $\log_3(7x+6) \geq 2+\log_3(x)$ só está definida se $x > 0 \wedge 7x+6 > 0$, ou seja, se $x > 0 \wedge x > -\frac{6}{7}$, ou mais simplesmente, se $x > 0$

Pelo que a condição é verdadeira $\log_3(7x+6) \geq 2 + \log_3(x)$ para os valores de x tais que $x \leq 3 \wedge x > 0$, ou seja, no intervalo

$$]-\infty,3] \cap]0,+\infty[=]0,3]$$

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

23.

23.1. Como $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$, o número, em milhares, de pessoas que estavam infetadas com a doença, nesta região, t anos após o início de 1960 é

$$I(t) = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1 + 1 \times e^{\frac{1}{2}t}} = \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1 + e^{\frac{t}{2}}}$$

E o ano em que o número de pessoas infetadas, nesta região atingiu os 2500, ou seja, os 2,5 milhares é a solução da equação

$$I(t) = 2,5$$

Assim, resolvendo a equação, temos

$$I(t) = 2,5 \Leftrightarrow \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1 + e^{\frac{t}{2}}} = 2,5 \underset{1+e^{\frac{t}{2}}>0}{\Leftrightarrow} 3e^{\frac{t}{2}} = 2,5\left(1 + e^{\frac{t}{2}}\right) \Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} = 2,5 + 2,5e^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} - 2,5e^{\frac{t}{2}} = 2,5 \Leftrightarrow 0,5e^{\frac{t}{2}} = 2,5 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}} = \frac{2,5}{0,5} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \ln 5 \Leftrightarrow t = 2\ln 5$$

Logo, como $2\ln 5 \approx 3,219$ e $1960 + 3,219 \approx 1963$, temos que o número de pessoas infetadas, nesta região, atingiu os 2500 no ano de 1963

23.2. Como, nesta região, em 1961, ou seja 1 ano após o início de 1960 ($t = 1$), se constatou que havia um milhar de pessoas infetadas ($I = 1$), então temos que

$$I(1) = 1$$

Logo, substituindo na expressão da função I, resolvendo em ordem a k e escrevendo o resultado na forma $k = -\ln(A + pB)$, vem que

$$I(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{3e^{k\times 1}}{1 + pe^{k\times 1}} \Leftrightarrow 1 = \frac{3e^{k}}{1 + pe^{k}} \underset{1+pe^k \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 + pe^k = 3e^k \Leftrightarrow 1 = 3e^k - pe^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^k(3 - p) \Leftrightarrow \frac{1}{3 - p} = e^k \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{3 - p}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln(3 - p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 - \ln(3 - p) \Leftrightarrow k = -\ln(3 - p)$$

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

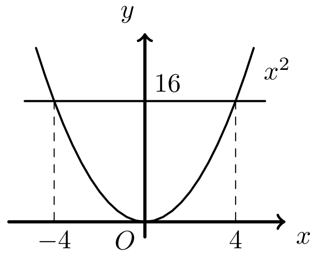
24. Resolvendo a equação, temos:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, Ép. especial

25. Temos que



$$h(-4) = ln\left((-4)^2 + 1\right) = \ln(16+1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $]-\infty, 0]$, temos :

$$h(x) > h(-4) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 17 \Leftrightarrow$$

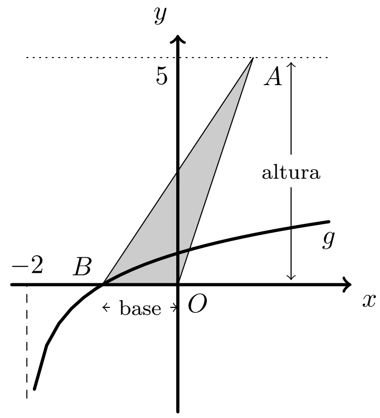
$$\Leftrightarrow x^2 > 17 - 1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \ \vee \ x > 4$$

Como o domínio de valência da inequação é $]-\infty, 0]$, o conjunto solução é

$$]-\infty, 0] \cap \Big( ]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[\Big) =]-\infty, -4[$$

Exame – 2010, Ép. especial

26. Como o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, podemos determinar a sua abcissa, calculando o zero da função g:



$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = e^0 \Leftrightarrow x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

E assim, considerando o lado $[OB]$ do triângulo como a base, a altura será a ordenada do ponto A, (independentemente da sua abcissa), pelo que a área do triângulo é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times y_A}{2} = \frac{|x_B| \times y_A}{2} = \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, 1ª Fase

27.

27.1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, vem que, para qualquer valor de $t \in [0,5]$:

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1) = 8 \times 3\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) =$$

$$= 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) = 16\log_4(3t+1)$$

27.2. Como $N(t)$ é o número de bilhetes vendidos, em centenas, t horas após o início da venda, e 2400 bilhetes são 24 centenas de bilhetes, o tempo necessário para vender 2400 bilhetes é a solução da equação $N(t) = 24$:

$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16\log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3t+1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t+1 = 8 \Leftrightarrow 3t = 8-1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$$

Escrevendo o resultado em horas e minutos, temos que $t = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, e como $\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos, temos que serão necessárias 2 horas e 20 minutos para que sejam vendidos 2400 bilhetes.

Exame – 2010, 1ª Fase

28. Os zeros da função g são as soluções da equação $g(x) = 0$, que pertencem ao domínio de g
Assim, temos que:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(f(x) - 3) = 0 \Leftrightarrow x + \ln\left(3 + 4x^2e^{-x} - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x + \ln\left(4x^2 \times e^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \ln\left(4x^2\right) + \ln\left(e^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \ln\left(4x^2\right) + (-x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = e^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Como o domínio da função g é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, então o conjunto dos zeros da função é $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

Teste Intermédio 12º ano – 19.05.2010

29. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_5\left(\frac{5^{1000}}{25}\right) = \log_5\left(5^{1000}\right) - \log_5 25 = 1000 - \log_5\left(5^2\right) = 1000 - 2 = 998$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010

30.

30.1. Supondo que $k = 10$, temos que:

$$f(t) = \frac{10}{3 - 2e^{-0,13t}}$$

Assim, como $f(t)$ é o número de coelhos, em milhares, t semanas após a deteção da doença, a solução da equação $f(t) = 9$ é o número t de semanas após a deteção da doença em que existiam 9 milhares de coelhos.
Resolvendo a equação temos que:

$$f(t) = 9 \Leftrightarrow \frac{10}{3 - 2e^{-0,13t}} = 9 \Leftrightarrow \frac{10}{9} = 3 - 2e^{-0,13t} \Leftrightarrow 2e^{-0,13t} = 3 - \frac{10}{9} \Leftrightarrow 2e^{-0,13t} = \frac{27}{9} - \frac{10}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-0,13t} = \frac{17}{9} \Leftrightarrow e^{-0,13t} = \frac{17}{18} \Leftrightarrow -0,13t = \ln\left(\frac{17}{18}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0,13}$$

Logo, o número de coelhos existentes na região é igual a 9000 ao fim de $\frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0,13} \approx 0,4397$ semanas.

Como cada semana tem 7 dias, o número de coelhos existentes na região é igual a 9000 ao fim de $0,4397 \times 7 \approx 3$ dias.

30.2. O número de coelhos no início da primeira semana ($t = 0$), é dado por $f(0)$ e no final da primeira semana ($t = 1$) é dado por $f(1)$

Como durante a primeira semana, morreram dois mil coelhos (2 milhares) e não nasceu nenhum, sabemos que

$$f(1) = f(0) - 2$$

Como

- $f(0) = \dfrac{k}{3 - 2e^{-0,13\times 0}} = \dfrac{k}{3 - 2\times 1} = \dfrac{k}{1} = k$
- $f(1) = \dfrac{k}{3 - 2e^{-0,13\times 1}} = \dfrac{k}{3 - 2e^{-0,13}}$

Assim, resolvendo a equação para determinar o valor k, vem:

$$f(1) = f(0) - 2 \Leftrightarrow \frac{k}{3 - 2e^{-0,13}} = k - 2$$

Considerando a aproximação $3 - 2e^{-0,13} \approx 1,2438$ vem:

$$\frac{k}{1,2438} = k - 2 \Leftrightarrow k = 1,2438k - 2 \times 1,2438 \Leftrightarrow 2,4876 = k(1,2438 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,4876 = k(1,2438 - 1) \Leftrightarrow \frac{2,4876}{0,2438} = k$$

Arredondando o valor de k às décimas, temos que $k \approx 10,2$

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010

31. Temos que:

$$b = a^2 \underset{a>1}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{2}}$$

Assim, usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$1 + \log_b a = 1 + \log_b \left(b^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, Ép. especial

32. Como a abcissa do ponto P é positiva, porque este se deslocar sobre o semieixo positivo das abcissas, então podemos considerar a base do triângulo o lado $[OP]$ e a sua medida é a abcissa do ponto P, pelo que $\overline{OP} = x$

Como relativamente à base $[OP]$, a altura é o lado $[PA]$, e a medida da altura é a ordenada do ponto A, temos que $\overline{PA} = f(x) = e^x$

Assim, a área do triângulo $[OAP]$ em função de x (abcissa do ponto P) é:

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PA}}{2} = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x.e^x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, Ép. especial

33.

33.1. Como $M_1 = 0,67 \log E_1 - 3,25$ e $M_2 = 0,67 \log E_2 - 3,25$, temos que

$$M_1 - M_2 = 1 \Leftrightarrow 0,67 \log E_1 - 3,25 - (0,67 \log E_2 - 3,25) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,67 \log E_1 - 3,25 - 0,67 \log E_2 + 3,25 = 1 \Leftrightarrow 0,67 \log E_1 - 0,67 \log E_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,67(\log E_1 - \log E_2) = 1 \Leftrightarrow \log E_1 - \log E_2 = \frac{1}{0,67} \Leftrightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{0,67} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0,67}}$$

E assim temos que $\dfrac{E_1}{E_2} \approx 31$

33.2. Como o sismo teve magnitude 4,7, na escala de Richter, vem que $M = 4,7$

E assim, substituindo o valor de M na expressão $M = 0,67 \log E - 3,25$, e calculando o valor de E, vem:

$$4,7 = 0,67 \log E - 3,25 \Leftrightarrow 4,7 + 3,25 = 0,67 \log E \Leftrightarrow \frac{7,95}{0,67} \log E \Leftrightarrow E = 10^{\frac{7,95}{0,67}}$$

Assim, a energia libertada nesse sismo, em notação científica, foi de, aproximadamente 7×10^{11} joules

Exame – 2009, Ép. especial

34. Calculando as imagens das abcissas dos pontos indicados em cada uma das opções pela função f, temos:

- $f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$
- $f(\ln 2) = e^{\ln 2+1} = e^{\ln 2} \times e^1 = 2 \times e = 2e$
- $f(\ln 5) = e^{\ln 5+1} = e^{\ln 5} \times e^1 = 2 \times e = 5e$
- $f(-2) = e^{-2+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Pelo que podemos verificar que, de entre os pontos apresentados, o ponto de coordenadas $(\ln 2, 2e)$ é o único que pertence ao gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, 2ª Fase

35. Calculando a área afetada quando a doença foi detetada ($t = 0$), e a área afetada uma semana depois ($t = 1$), temos:

$$A(0) = 2 - 0 + 5\ln(0 + 1) = 2 + 5 \times 0 = 2$$
$$A(1) = 2 - 1 + 5\ln(1 + 1) = 1 + 5\ln(2)$$

Assim, o aumento da área afetada registado na primeira semana, em hectares, arredondado às centésimas é de

$$A(1) - A(0) = 1 + 5\ln(2) - 2 = 5\ln(2) - 1 \approx 2,47 \text{ ha}$$

Exame – 2009, 2ª Fase

36. Usando as propriedades das potências e dos logaritmos, temos que:

$$e^{4\ln x} - 10^{2\log x} = e^{\ln x^4} - 10^{\log x^2} = x^4 - x^2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1ª Fase

37. Como os domínios de f e g são, respetivamente $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, então a condição $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em

$$]1, +\infty[\cap] - \infty, 2[=]1, 2[$$

Assim, vem que:

$$f(x) \geq 1 + h(x) \Leftrightarrow \log_2(x - 1) \geq 1 + \log_2(2 - x) \Leftrightarrow \log_2(x - 1) \geq \log_2 2 + \log_2(2 - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x - 1) \geq \log_2 (2 \times (2 - x)) \Leftrightarrow \log_2(x - 1) \geq \log_2(4 - 2x) \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 4 - 2x \Leftrightarrow x + 2x \geq 4 + 1 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Como $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em $]1, 2[$, o conjunto solução é

$$\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[\cap]1, 2[= \left[\frac{5}{3}, 2\right[$$

Exame – 2009, 1ª Fase

38. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\log_a x = 1 + 5\log_a y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a a + \log_a y^5 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a \left(a \times y^5\right) \Rightarrow x = ay^5$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

39. Como

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $13 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -13 \Leftrightarrow x < 13$

Então os valores de x para os quais a inequação está definida são:

$$]1, +\infty[\cap]-\infty, 13[=]1, 13[$$

E, resolvendo a inequação, vem que:

$$\log_2(x-1) + \log_2(13-x) \leq 5 \Leftrightarrow \log_2\big((x-1)\times(13-x)\big) \leq \log_2 2^5 \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow (x-1)\times(13-x) \leq 2^5 \Leftrightarrow 13x - x^2 - 13 + x \leq 32 \Leftrightarrow -x^2 + 14x - 13 - 32 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 14x - 45 \leq 0 \Leftrightarrow$$

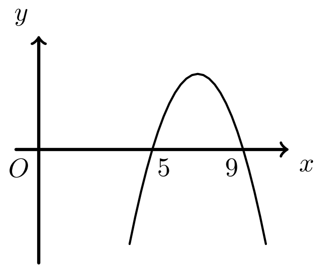
$$\Leftrightarrow (x-5)(x-9) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \vee x \geq 9$$

Cálculos auxiliares:

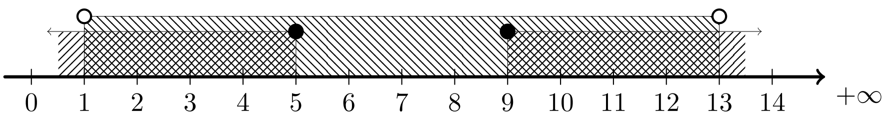
$$-x^2 + 14x - 45 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(-1)(-45)}}{2(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-14+4}{-2} \vee x = \frac{-14-4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 9$$



Como a inequação está definida para $x \in]1, 13[$, representando a interseção dos conjuntos, temos:



E assim, o conjunto solução da inequação é

$$]1, 5] \cup [9, 13[$$

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

40.

40.1. Escrevendo os dados apresentados com recurso à função descrita, temos que:

- A massa de *carbono-14* presente no fóssil, mil anos depois de um certo instante inicial, era de $2,91$g, significa que
$$m(1) = 2,91$$
- A massa de *carbono-14* presente no fóssil, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de $2,58$g, significa que
$$m(2) = 2,58$$

Assim, temos que:
$$ae^{b\times 1} = 2,91 \text{ e que } ae^{b\times 2} = 2,58$$

Como o valor de a é o mesmo (porque é a massa da substância no referido instante inicial), então como:
$$a = \frac{2,91}{e^b} \text{ e como } a = \frac{2,58}{e^{2b}}$$

Calculando o valor de b e arredondando o resultado às centésimas, vem que:
$$\frac{2,91}{e^b} = \frac{2,58}{e^{2b}} \Leftrightarrow \frac{e^{2b}}{e^b} = \frac{2,58}{2,91} \Leftrightarrow e^{2b-b} = \frac{2,58}{2,91} \Leftrightarrow e^b = \frac{2,58}{2,91} \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2,58}{2,91}\right) \Rightarrow b \approx -0,12$$

Utilizando o valor de b para determinar o valor de a, ou seja, a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial, e arredondando o resultado final às centésimas, temos:
$$m(1) = 2,91 \Leftrightarrow ae^b = 2,91 \Rightarrow ae^{-0,120} \approx 2,91 \Rightarrow a \times 0,887 \approx 2,91 \Rightarrow a \approx \frac{2,91}{0,887} \Rightarrow a \approx 3,28 \text{ g}$$

40.2. Considerando $b = -0,43$ temos que:
$$\frac{m(t+1,6)}{m(t)} = \frac{ae^{-0,43(t+1,6)}}{ae^{-0,43t}} = \frac{e^{-0,43(t+1,6)}}{e^{-0,43t}} = e^{-0,43(t+1,6)-(-0,43t)} = e^{-0,43t-0,688+0,43t} = e^{-0,688}$$

Assim, temos que $\dfrac{m(t+1,6)}{m(t)}$ é constante e o valor dessa constante, arredondado às décimas, é
$$e^{-0,688} \approx 0,5$$

E assim temos que:
$$\frac{m(t+1,6)}{m(t)} \approx 0,5 \Leftrightarrow m(t+1,6) \approx 0,5\, m(t)$$

o que significa que a passagem de 1,6 milhares de anos, ou seja, 1600 anos, implica uma diminuição da massa de *radio-266* para metade.

Teste Intermédio 12º ano – 11.03.2009

41. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:
$$x.\ln\left(e^e\right) = x.e\ln e = x.e \times 1 = ex$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, Ép. especial

42. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$T(t)=60 \Leftrightarrow 25+48e^{-0,05t}=60 \Leftrightarrow 48e^{-0,05t}=60-25 \Leftrightarrow e^{-0,05t}=\frac{35}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,05t=\ln\frac{35}{48} \Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{35}{48}}{-0,05} \Rightarrow t\approx 6,3171$$

Assim temos que o tempo corresponde a 6,3171 minutos, aproximadamente. E como cada minuto tem 60 segundos, fazendo a conversão de 0,3171 minutos para segundos, vem

$$0,3171\times 60=19,0260\approx 19 \text{ s}$$

Pelo que se concluí que demorou 6 minutos e 19 segundos, após o início do arrefecimento, para que a temperatura da água atingisse os 36º Celsius.

Exame – 2008, Ép. especial

43. Como o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função, e resolvendo a equação, podemos determinar o valor de a:

$$3=2^{a\times 1}-1 \Leftrightarrow 3+1=2^a \Leftrightarrow 4=2^a \Leftrightarrow a=\log_2 4 \Leftrightarrow a=2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, 2ª Fase

44. Determinando a massa inicial da amostra da substância radioativa, ou seja a massa ao fim de zero horas ($t=0$), vem que:

$$M(0)=15\times e^{-0,02\times 0}=15\times e^0=15\times 1=15$$

Assim, equacionado o problema e resolvendo a equação vem:

$$M(t)=\frac{15}{2} \Leftrightarrow 15\times e^{-0,02t}=\frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t}=\frac{15}{2\times 15} \Leftrightarrow e^{-0,02t}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,02t=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{1}{2}}{-0,02} \Rightarrow t\approx 34,657$$

Assim temos que o tempo corresponde a 34,657 horas, aproximadamente. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,657 horas para minutos, vem

$$0,657\times 60=39,420\approx 39 \text{ min}$$

Pelo que se concluí ao fim de 34 horas e 39 minutos a massa inicial da amostra da substância radioativa se reduz a metade.

Exame – 2008, 2ª Fase

45. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=2\times\frac{1}{3}\log_a a=\frac{2}{3}\log_a a=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 1ª Fase

46. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$N(t)=1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+199e^{-0,01t}}=1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1000}=1+199e^{-0,01t} \Leftrightarrow 2-1=199e^{-0,01t} \Leftrightarrow \frac{1}{199}=e^{-0,01t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,01t=\ln\frac{1}{199} \Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{1}{199}}{-0,01} \Rightarrow t\approx 529,330$$

Assim, podemos observar que ao fim de 529 dias ainda a associação ainda não contava com 1000 associados e que este número foi atingido durante o 530º dia.

Exame – 2008, 1ª Fase

47. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\log_a 3 + 2\log_a 5 = \log_a 3 + \log_a \left(5^2\right) = \log_a \left(3 \times 5^2\right) = \log_a (3 \times 25) = \log_a 75$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

48.

48.1. Supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago, temos que:

$$f(0) = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+ke^{-0,13\times 0}} = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+ke^{0}} = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+k\times 1} = 100 \Leftrightarrow 2000 = 100\,(1+k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000 = 100 + 100k \Leftrightarrow 2000 - 100 = 100k \Leftrightarrow \frac{1900}{100} = k \Leftrightarrow 19 = k$$

48.2. O número de anos que decorre até que o número de peixes no lago atinge o meio milhar (500), é a solução da equação $f(t) = 500$

Assim, considerando $k = 24$, resolvendo a equação e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos que:

$$f(t) = 500 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+24e^{-0,13t}} = 500 \Leftrightarrow 2000 = 500\left(1+24e^{-0,13t}\right) \Leftrightarrow 2000 = 500 + 12000e^{-0,13t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000 - 500 = 12000e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{1500}{12000} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow -0,13t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,13t = \ln 1 - \ln 8 \Leftrightarrow -0,13t = -\ln 8 \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 8}{-0,13} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{0,13} \Rightarrow t \approx 16$$

Teste Intermédio 12º ano – 29.04.2008

49. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$\log_5(x) = \pi - 1 \Leftrightarrow x = 5^{\pi-1} \Leftrightarrow 5\times x = 5\times 5^{\pi-1} \Leftrightarrow 5x = 5^{1+\pi-1} \Leftrightarrow 5x = 5^{\pi}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 17.01.2008

50.

50.1. Como o número de indivíduos que existiam no instante inicial é a, então r vezes o número de indivíduos que existiam no instante inicial é $r\times a$

Por outro lado a população de indivíduos ao fim de n dias é $P(n) = ae^{kn}$

Assim, temos que:

$$r\times a = ae^{kn} \Leftrightarrow r = \frac{ae^{kn}}{a} \Leftrightarrow r = e^{kn} \Leftrightarrow kn = \ln(r) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(r)}{n}$$

50.2. Como no instante inicial em cada colónia foram colocadas 500 bactérias temos que $a = 500$, e decorrido exatamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos, pelo que $P(1) = 250$

Assim, resolvendo a equação podemos calcular o valor de k_A , com quatro casas decimais:

$$P(1) = 250 \Leftrightarrow 500e^{k_A\times 1} = 250 \Leftrightarrow e^{k_A} = \frac{250}{500} \Leftrightarrow e^{k_A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k_A \approx -0,6931$$

Relativamente à estirpe B, como após seis dias a população era de 1000 indivíduos, temos que $P(6) = 1000$

Assim, resolvendo a equação podemos calcular o valor de k_B, com quatro casas decimais:

$$P(6) = 1000 \Leftrightarrow 500e^{k_B\times 6} = 1000 \Leftrightarrow e^{6k_B} = \frac{1000}{500} \Leftrightarrow e^{6k_B} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k_B = \ln(2) \Leftrightarrow k_B = \frac{\ln(2)}{6} \Rightarrow k_B \approx 0,1155$$

Teste Intermédio 12º ano – 17.01.2008

51. As abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são as soluções da equação $f(x) = 0$. Resolvendo a equação, temos que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln\left(x^2\right) \Leftrightarrow x^2 = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são:

$$\left(-\sqrt{e}, 0\right) \text{ e } \left(\sqrt{e}, 0\right)$$

Exame – 2007, 2ª Fase

52. Resolvendo a inequação temos que:

$$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

Como $\sqrt[3]{e} \approx 1,4$, temos que, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para x é 2

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 1ª fase

53. Calculando a intensidade da luz solar à superfície da água, ou seja a zero metros de profundidade temos:

$$I(0) = ae^{-b\times 0} = ae^0 = a \times 1 = a$$

Como a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água, temos que $I(20) = \frac{I(0)}{2}$

Resolvendo a equação, e apresentando o resultado arredondado às centésimas, vem que:

$$I(20) = \frac{I(0)}{2} \Leftrightarrow ae^{-b\times 20} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{a}{2a} \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{-20b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-20} \Rightarrow b \approx 0,03$$

Exame – 2007, 1ª Fase

54. Resolvendo a inequação, temos que:

$$e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} > \frac{1}{e} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} e > e^x \Leftrightarrow e^1 > e^x \underset{(2)}{\Leftrightarrow} 1 > x \Leftrightarrow x < 1$$

(1) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(2) e^x é crescente no seu domínio
Escrevendo as soluções na forma de intervalo de números reais temos: $]-\infty, 1[$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

55. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$\log_a\left(a \times \sqrt[3]{a}\right) = \log_a a + \log_a \sqrt[3]{a} = 1 + \log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_a a = 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXX EM CONSTRUÇÃO XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

56. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH, que é dado por

$$pH = -\log(x)$$

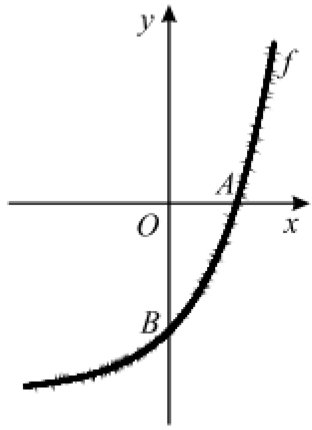
onde x designa a concentração de iões H_3O^+, medida em mol/dm^3.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

56.1. Admita que o pH do sangue arterial humano é 7,4.
Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+, no sangue arterial humano?
Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10.
Apresente o valor de a arredondado às unidades.

56.2. A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite.
Qual é a diferença entre o pH do leite e o pH do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.
Sugestão: comece por designar por l a concentração de iões H_3O^+ no leite e por exprimir, em função de l, a concentração de iões H_3O^+ no café.

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

57. Seja c um número real maior do que 1.



Na figura ao lado está representada uma parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - c$.

Tal como a figura sugere

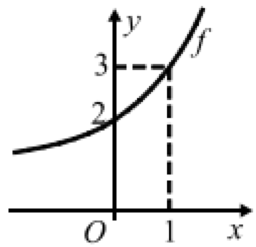
- A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox
- B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy

Mostre que:

Se o declive da reta AB é $c - 1$, então $c = e$

Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2007

58. Sejam a e b dois números reais positivos.
Na figura ao lado está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.
Tal como a figura sugere, os pontos $(0,2)$ e $(1,3)$ pertencem ao gráfico de f.
Quais são os valores de a e de b?



(A) $a = 2$ e $b = 1$ **(B)** $a = 2$ e $b = 3$

(C) $a = 3$ e $b = 2$ **(D)** $a = 3$ e $b = 1$

Exame – 2006, 2ª Fase

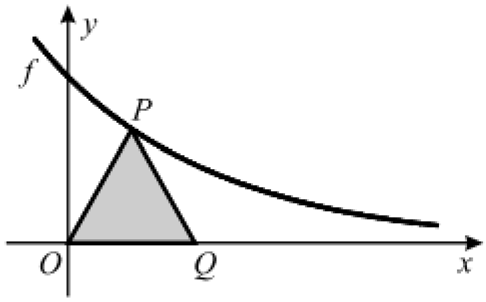
59. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} \qquad \text{(ln designa logaritmo de base } e\text{)}$$

Qual das seguintes expressões pode também definir h?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\frac{x}{2}$ **(C)** $\frac{x}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{x}}{2}$

60. Na figura ao lado estão representados:
- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$, $\left(\overline{PO} = \overline{PQ}\right)$em que:
  - O é a origem do referencial;
  - P é um ponto do gráfico de f;
  - Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.
O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.
Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.
Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = xe^{-x}$

Exame – 2006, 1ª fase

61. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(A) $\dfrac{1}{2}$ **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** $\dfrac{5}{2}$ **(D)** $\dfrac{7}{2}$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

62. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_3(1 - x) \leq 1$

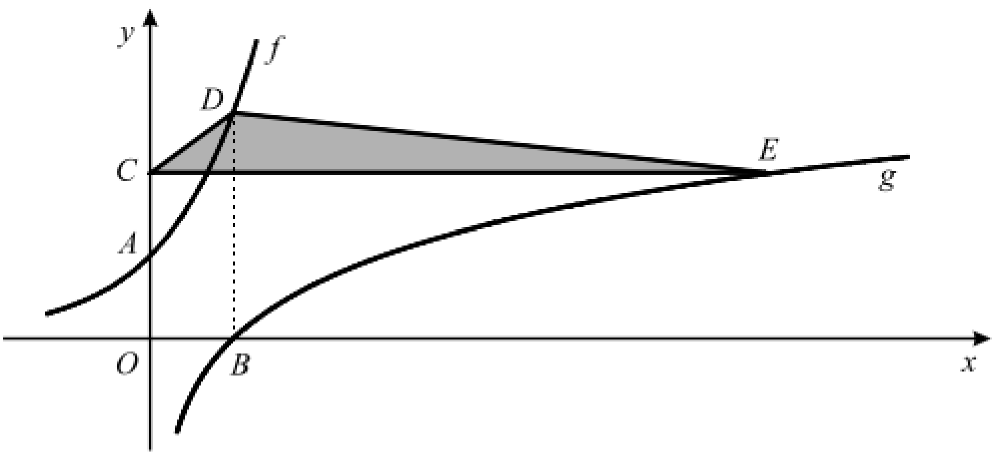
(A) $[-2, 1[$ **(B)** $[-1, 2[$ **(C)** $]-\infty, -2]$ **(D)** $[2, +\infty[$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

63. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo de base e)

O ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox.



Na figura está também representado um triângulo $[CDE]$.
O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g.
Sabe-se ainda que:

- a reta $[BD]$ é paralela ao eixo Oy e a reta $[CE]$ é paralela ao eixo Ox
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo $[CDE]$?

(A) $\dfrac{(e-1)\ln 2}{2}$ **(B)** $\dfrac{(e^2-1)\ln 2}{2}$ **(C)** $\dfrac{e(e-2)}{2}$ **(D)** $\dfrac{e^2(e-2)}{2}$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

64. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função
$$V(x) = e^{14-x}$$
sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).
A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite.
Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por
$$L(x) = (x-3)e^{14-x}$$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

65. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$ (ln designa logaritmo de base e).
Sem recorrer à calculadora, mostre que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(4e^2\right)$

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

66. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência.
Admita que:

- neste laboratório, a temperatura ambiente é constante;
- a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente;
- depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente.

Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo t, contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções a, b, c e d, definidas a seguir:

$$a(t) = \begin{cases} 24-2t & \text{se } 0 \le t \le 5 \\ 24-10e^{-0{,}04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases} \qquad b(t) = \begin{cases} 12(t+2) & \text{se } 0 \le t \le 5 \\ 24+70e^{-0{,}04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 14(t+1) & \text{se } 0 \le t \le 5 \\ 24+60e^{-0{,}04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases} \qquad d(t) = \begin{cases} 12(t+2) & \text{se } 0 \le t \le 5 \\ 24+60e^{-0{,}04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é a correta?
Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006

67. O tempo t, medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa, em torno do Sol, está relacionado com a distância média, d, desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula

$$2\ln(t) = k + 3\ln(d)$$

(k é uma constante real e ln designa o logaritmo de base e)

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

67.1. Sabe-se que:

- a distância média de Urano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol;
- o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.

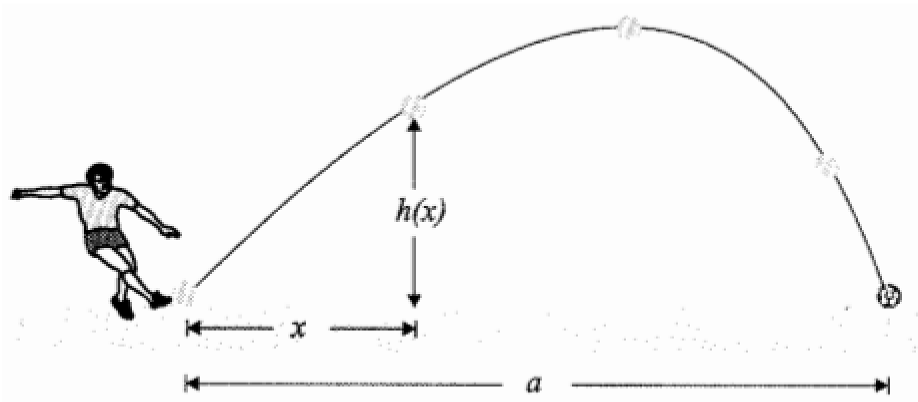
Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol. Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

67.2. Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de 149,6 milhões de quilómetros, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às unidades).

Exame – 2005, Ép. especial

68. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontepeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0, a]$ por

$h(x) = 2x + 10\ln(1 - 0,1x)$ (ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.
Sem utilizar a calculadora, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo $[1, 3]$ é

$$\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

Exame – 2005, 2ª Fase

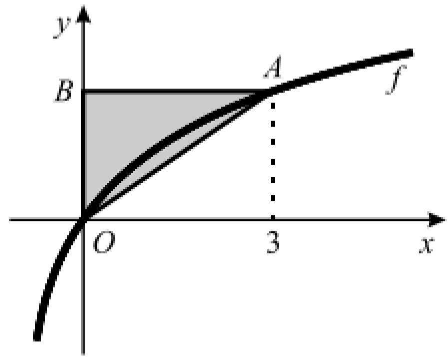
69. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em $]-1,+\infty[$, por

$$f(x)=\log_2(x+1)$$

Na mesma figura, está também representado um triângulo retângulo $[ABO]$.
O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f.
O ponto B pertence ao eixo Oy.

Qual é a área do triângulo $[ABO]$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4



Exame – 2005, 1ª fase

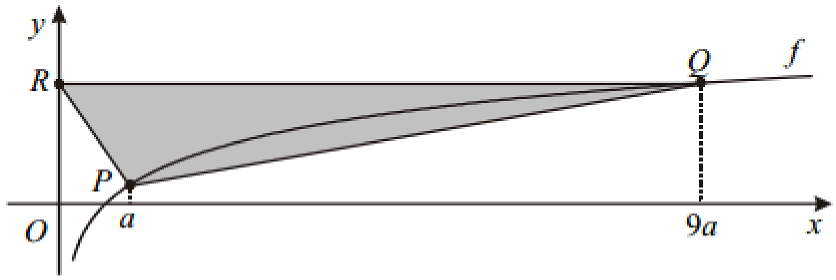
70. Admita que o número de elementos de uma população de aves, anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t)=5,2\times 10^7\times e^{(N-M)t},\quad t\geq 0,$$

em que N e M são duas constantes, denominadas, respetivamente, por *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.
No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a *taxa de natalidade* é 7,56, determine a *taxa de mortalidade*, **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.
Apresente o resultado arredondado às centésimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2005, 1ª Fase

71. Na figura seguinte está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\log_3 x$.



Na figura está também representado um triângulo $[PQR]$.
Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f e as suas abcissas são a e $9a$, respetivamente (a designa um número real positivo).
O ponto R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de Q.
Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$?

(A) $9a^2$ **(B)** $9a$ **(C)** $\dfrac{9a^2}{2}$ **(D)** $\dfrac{9a+1}{2}$

Exame – 2004, Ép. especial

72. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16=4$

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$

Exame – 2004, 2ª Fase

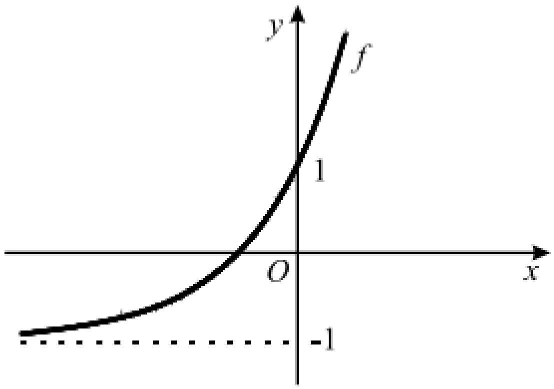
73. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4

Exame – 2004, 1ª Fase

74. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, o gráfico da função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + be^x$, está parcialmente representado na figura ao lado.



Tal como a figura sugere,

- a reta de equação $y = -1$ é assintota do gráfico de f
- o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = -1$ e $b = 2$ **(B)** $a = -1$ e $b = 1$

(C) $a = 1$ e $b = -1$ **(D)** $a = 1$ e $b = -2$

Exame – 2003, Prova para militares

75. Seja g uma função de domínio A, definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$
Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A?

(A) $]-e+1, e-1[$ **(B)** $]-1,1[$ **(C)** $]0,+\infty[$ **(D)** $]-\infty,1[$

Exame – 2003, 2ª fase

76. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8e^{-0,036t}}$$

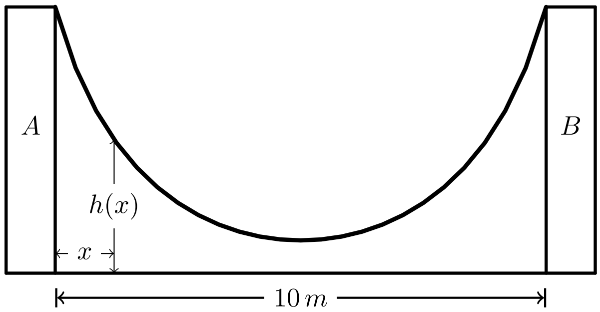
(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano 1864).

76.1. De acordo com este modelo, qual foi a população de Portugal Continental no **final** do ano de 2003? Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

76.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:
De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2003, 2ª Fase

77. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura ao lado.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)$$

(ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado a x metros à direita da parede A.

77.1. Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

77.2. Mostre, analiticamente, que $h(5 - x) = h(5 + x)$
Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

Exame – 2003, 1ª fase - 2ª chamada

78. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.
Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.
Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado.
Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**.
Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\,,\ t \in [0, 24] \qquad \text{(ln designa logaritmo de base } e\text{)}$$

Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos **da tarde**?
Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas e sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada

79. Sejam a e b dois números reais positivos.
Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\ln a = -\ln b$?

(A) $a + b = 1$ **(B)** $\frac{a}{b} = 1$ **(C)** $a \times b = 1$ **(D)** $a - b = 1$

Exame – 2002, Prova para militares

80. Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \qquad\qquad g(x) = 2\,\text{sen}\,x - \cos x$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma $\ln(ke)$, onde k representa um número real positivo.
(ln designa logaritmo de base e)

Exame – 2002, 2ª Fase

81. O nível intensidade N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10\log_{10}(10^{12}I), \text{ para } I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

81.1. Verifique que $N = 120 + 10\log_{10} I$

81.2. Admita que o nível de ruído de um avião a jato, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.
Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

Exame – 2002, 1ª fase - 2ª chamada

82. O gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0,1 + 0,2e^{0,3x}$ uma única assíntota.
Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?

(A) $y = 0$ **(B)** $y = 0,1$ **(C)** $y = 0,2$ **(D)** $y = 0,3$

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

83. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.
Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por

$$A(t) = 4t^3e^{-t} \qquad \text{e} \qquad C(t) = 2t^3e^{-0,7t}$$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0,12]$).
Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

83.1. Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze depois **minutos** de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

83.2. No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

84. A Sofia preparou um pudim, para servir como sobremesa ao jantar. Depois de o ter confeccionado, a Sofia colocou o pudim a arrefecer, na bancada da cozinha. Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.
Admita que a temperatura do pudim, em graus centígrados, t minutos depois de ter sido colocado na bancada, é dada, para um certo valor de A, por

$$f(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0,05t}, & 0 \leq t < 60 \\ \\ 6 + A \times 2^{-0,05(t-60)}, & \text{t} \geq 60 \end{cases}$$

Quanto tempo deverá o pudim estar **no frigorífico**, para que a sua temperatura fique igual a doze graus?
Apresente o resultado em minutos e utilize métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2001, Prova para militares

85. Considere a equação $3y = \log_2 x \quad (x > 0)$
Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ **(B)** $x = 3y^2$ **(C)** $y = 9^x$ **(D)** $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

Exame – 2001, Ép. especial

86. Um petroleiro que navegava no Oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em Km^2, de crude espalhado pelo oceano é dada por

$$A(t) = 16e^{0,1t}\,,\ \ (t \in [0,24])$$

86.1. Verifique que, para qualquer valor de t, $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.
Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

86.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia seguinte ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2001, 2ª Fase

87. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 2^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

(A) Conjunto vazio **(B)** $\mathbb{R}^-$ **(C)** $\mathbb{R}^+$ **(D)** $\mathbb{R}$

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

88. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas) por

$$A(p) = -0,52 + 0,55\ln p \qquad (\ln \text{ designa o logaritmo de base } e)$$

Recorrendo a métodos analíticos e usando a calculadora para fazer cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes.

88.1. O Ricardo tem $1,4\,m$ de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

88.2. Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada

89. Qual das expressões seguintes é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$?
(ln designa o logaritmo de base e)

(A) $2a$ **(B)** $2+a$ **(C)** $2a$ **(D)** a^2

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada

90. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra.
Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função de h em **quilómetros**, por

$$P(h) = 101e^{-0,12h}$$

90.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores.
A altitude do cume do Pico é 2350 metros.
Qual é o valor da pressão atmosférica nesse local?
Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

90.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h+x) = \frac{1}{2}P(h)$.
Apresente o resultado arredondado às décimas.
Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

Exame – 2000, 2ª fase

91. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

Resolva a equação $\ln[f(x)] = x$, recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ln designa logaritmo de base e).

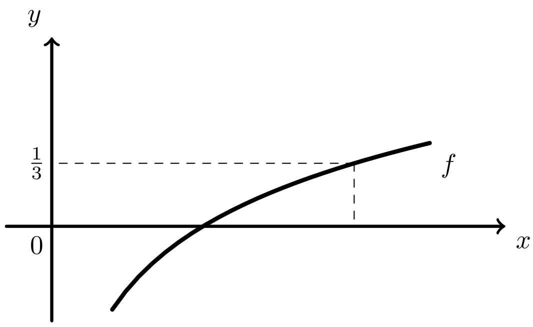
Exame – 2000, 1ª fase - 2ª chamada

92. Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

P é um ponto do gráfico de f que tem ordenada $\dfrac{1}{3}$

Qual é a abcissa do ponto P?

(A) $\dfrac{8}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\ln\left(\dfrac{8}{3}\right)$ **(D)** 2



Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada

93. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a b = c$
Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

(A) $1+c$ **(B)** $a+c$ **(C)** ac **(D)** $a+bc$

Exame – 2000, Prova modelo

94. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.
O gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2
Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

Exame – 2000, Prova para militares (prog. antigo)

95. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.
Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por
$v(t) = -3\ln(1 - 0{,}005t) - 0{,}01t$ (ln designa logaritmo de base e).
A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.
A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível.
Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que
$t \in [0, 160]$.

Exame – 1999, 1ª fase - 2ª chamada (prog. antigo)

96. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \log_2(2.\sqrt[3]{x})$
Qual das expressões seguintes também pode definir a função g?

(A) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$ **(B)** $2.\log_2(\sqrt[3]{x})$ **(C)** $\dfrac{3 + \log_2 x}{3}$ **(D)** $\dfrac{1 + \log_2 x}{2}$

Exame – 1999, Prova modelo (prog. antigo)

97. Um pára-quedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o pára-quedas abre.
Admita que a distância (em metros) a que o pára-quedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do pára-quedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$$

Sabendo que, no momento em que o pára-quedista salta do helicóptero, este se encontra a 1500 metros do solo, determine a distância percorrida em queda livre pelo pára-quedista (desde que salta do helicóptero até ao momento da abertura do pára-quedas).

Exame – 1998, Prova para militares (prog. antigo)

98. A magnitude M de um sismo e a energia total E libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação

$$\log_{10} E = 5,2 + 1,44M \qquad \text{(a energia } E \text{ é medida em Joule).}$$

98.1. Um físico português estimou que o terramoto de Lisboa de 1755 teve magnitude 8,6.
Mostre que a energia total libertada nesse sismo foi aproximadamente $4,2 \times 10^{17}$ Joule.

98.2. A ponte *Vasco da Gama* foi concebida para resistir a um sismo cuja energia total libertada seja cinco vezes a do terremoto de Lisboa de 1755. Qual é a magnitude de um sismo com essa característica? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Exame – 1998, 2ª fase (Prog. antigo)

99. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$

99.1. Mostre que $f(x) = 3 + \log_2 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$

99.2. Determine a abcissa do ponto de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = 8$

Exame – 1998, 1ª fase - 1ª chamada (Prog. antigo)

100. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(3x)$ (ln designa logaritmo de base e).
Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f?

(A) $(e, \ln 3)$ **(B)** $(e, 1 + \ln 3)$ **(C)** $(e, e + \ln 3)$ **(D)** $(e, e\ln 3)$

Exame – 1998, Prova modelo (prog. antigo)

101. Um fio encontra-se suspenso entre dois postes.
A distância entre ambos é de 30 metros.

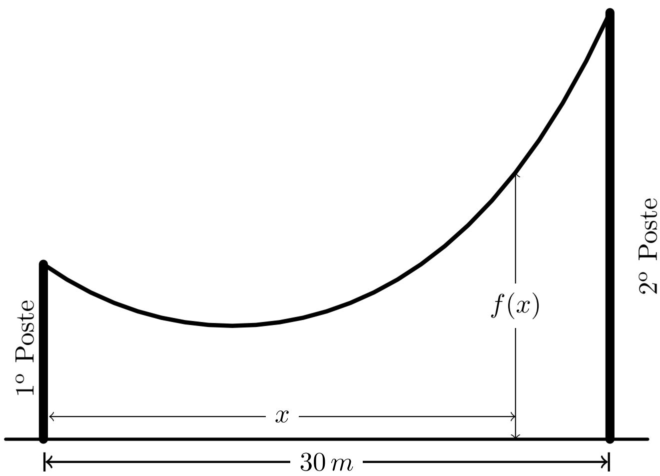
Considere a função f, definida por

$$f(x) = 5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right) \quad x \in [0, 30]$$

Admita que f(x) é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do primeiro poste.

Determine a diferença de altura dos dois postes. Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.



Exame – 1998, Prova modelo (prog. antigo)

102. A atividade R, de qualquer substância radioativa, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão

$$R(t) = A \times e^{-Bt} \ ,$$

em que A e B são constantes reais positivas e t é o tempo, em horas, com $t \geq 0$.

102.1. Mostre que o tempo necessário para que a atividade R passe do seu valor incial para metade é $\dfrac{\ln 2}{B}$

102.2. Sabendo que o valor inicial da atividade de uma certa substância radioativa é 28 unidades e que $R(1) = 26$, determine os valores de A e de B para essa substância.

Exame – 1997, 2ª fase (prog. antigo)