

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Funções - Limite segundo Heine

Propostas de resolução

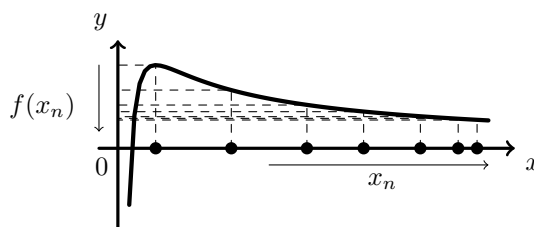
Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como $\lim u_n = \lim (n^2) = (+\infty)^2 = +\infty$, então

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para zero, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**



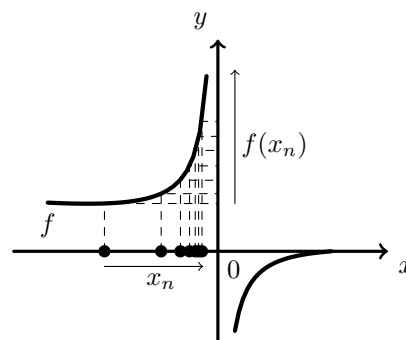
Exame – 2015, 1ª fase

2. Como $\lim x_n = \lim \left(-\frac{1}{n} \right) = 0^-$, então

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0 - 1}{e^{0^-} - 1} = \frac{-1}{1^- - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção D**



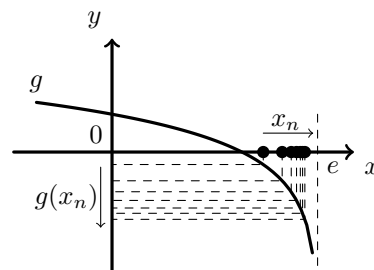
Exame – 2014, Ép. Especial

3. Como $\lim x_n = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = e^-$, então

$$\lim g(x_n) = \lim_{x \rightarrow e^-} g(x) = \ln(e - e^-) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção D**



Exame – 2014, 2ª fase



4. Como $\lim x_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+$, então

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} - 3 = e^{+\infty} - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

E assim

$$\lim \frac{2}{f(x_n)} = \frac{\lim 2}{\lim f(x_n)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1ª fase

5. Como se pretende que $\lim h(x_n) = +\infty$, então, de acordo com o gráfico da função h , a expressão da sucessão (x_n) pode ser

- $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ porque como $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$, temos que

$$\lim h(x_n) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$$

- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ porque como $\lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e^-$, temos que

$$\lim h(x_n) = \lim_{x \rightarrow e^-} h(x) = +\infty$$

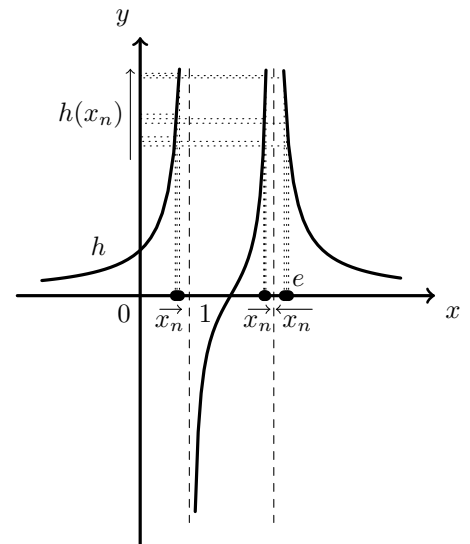
- $\left(e + \frac{1}{n}\right)$ porque como $\lim \left(e + \frac{1}{n}\right) = e^+$, temos que

$$\lim h(x_n) = \lim_{x \rightarrow e^+} h(x) = +\infty$$

Assim, concluímos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$ é a única expressão que não pode ser o termo geral da sucessão (x_n)

porque como $\lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3\right) = 1^+$ temos que $\lim h(x_n) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 12º ano – 30.04.2014



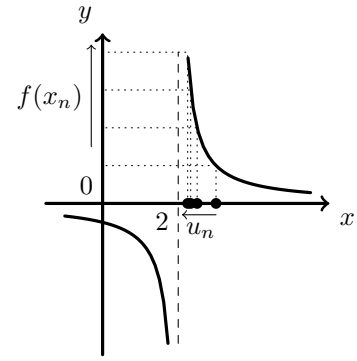
6. Temos que $\lim u_n = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2^+$

Como $\lim f(u_n) = +\infty$ então $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

No gráfico da opção (A), temos que $0 < \lim f(u_n) < 2$ pelo que $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq +\infty$

No gráfico da opção (B), temos que $-2 < \lim f(u_n) < 0$ pelo que $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq +\infty$

No gráfico da opção (D), temos que $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq -\infty$



No gráfico da opção (C) temos que $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ (como se ilustra graficamente na figura anterior).

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 28.02.2013

7. Como (x_n) é uma sucessão com termos em $] - 1, 1[$ e $\lim(x_n) = 1$, então

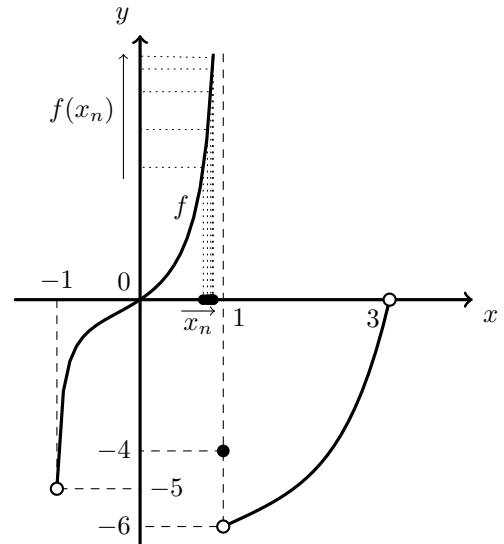
$$\lim x_n = 1^-$$

E assim, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando (x_n) tende para 1

Resposta: **Opção A**



Exame – 2012, 2ª Fase

8. Como $\lim u_n = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = e$, então $\lim f(u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow e} f(x) = 0$

Calculado $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ para cada uma das expressões algébricas apresentadas, temos:

- Se $f(x) = 1 - \ln x$ então $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (1 - \ln x) = 1 - \ln e = 1 - 1 = 0$
- Se $f(x) = 1 + \ln x$ então $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (1 + \ln x) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$
- Se $f(x) = x - \ln x$ então $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (x - \ln x) = e - \ln e$
- Se $f(x) = x + \ln x$ então $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (x + \ln x) = e + \ln e$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única expressão algébrica em que $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = 0$ é $1 - \ln x$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 13.03.2012



9. Se $\lim u_n = k$, então $\lim f(u_n) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow k} f(x) = 3$

Calculado $k = \lim u_n$ e $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$ para cada uma das sucessões apresentadas, temos:

- $\lim u_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (e^x - 1) = e^{2^-} - 1 = e^2 - 1$
- $\lim u_n = \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{4}{2^+} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\lim u_n = \lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3 - \frac{1}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3^-$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{4}{3^-} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$
- $\lim u_n = \lim \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{4}{3^+} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única sucessão em que $\lim f(u_n) = 3$ é $2 + \frac{1}{n}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, Prova especial

10. Como

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, 2ª Fase

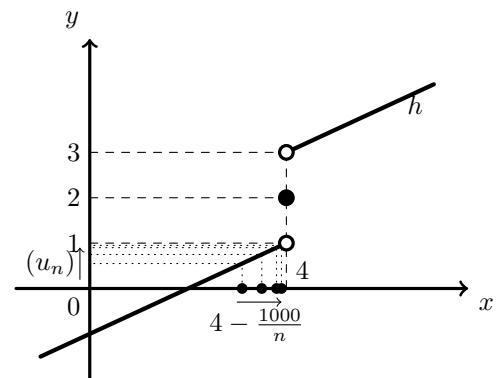
11. Como

$$\lim \left(4 - \frac{1000}{n} \right) = 4 - \frac{1000}{+\infty} = 4 - 0^+ = 4^-$$

então, pela observação do gráfico da função h , temos que

$$\lim u_n = \lim \left(h \left(4 - \frac{1000}{n} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = 1$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de $\left(4 - \frac{1000}{n} \right)$ como objetos, e alguns termos da sucessão (u_n) no eixo vertical, que tendem para 1^- , quando o valor de n aumenta.



Teste Intermédio 12º ano – 15.03.2010

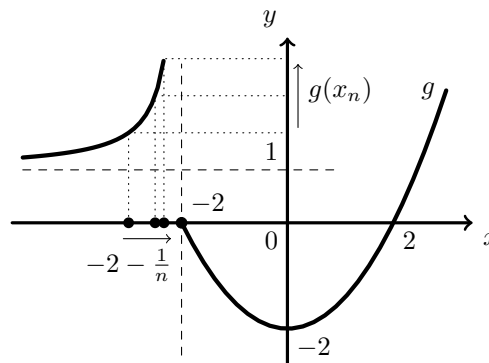


12. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = +\infty$, temos que

$$\lim(x_n) = +\infty \text{ ou então } \lim(x_n) = -2^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim \left(-2 + \frac{2}{n} \right) = -2 + 0^+ = -2^+$
- $\lim \left(-2 - \frac{1}{n} \right) = -2 - 0^+ = -2^-$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0^+ = 1^+$
- $\lim \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 - 0^+ = 1^-$



Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados,

o único em que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$ é $-2 - \frac{1}{n}$

Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = -2 + \frac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 2ª Fase

13. Como

$$\lim(u_n) = \lim \left(\frac{n+1}{n^2} \right) = \lim \left(\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 5}{2 + \cos x} = \frac{e^0 + 5}{2 + \cos(0)} = \frac{1 + 5}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1ª fase

14. Como

$$\lim(x_n) = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = e$$

Temos que

$$\lim y_n = \lim(1 + \ln(x_n)) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12º ano – 17.03.2006



15. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = +\infty$, então

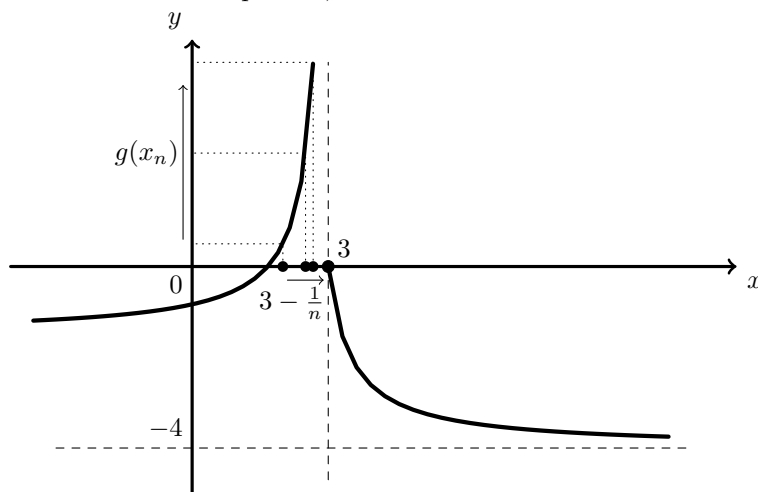
$$\lim(x_n) = 3^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3 - 0^+ = 3^-$
- $\lim \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3 + 0^+ = 3^+$
- $\lim \left(-4 - \frac{1}{n} \right) = -4 - 0^+ = -4^-$
- $\lim \left(-4 + \frac{1}{n} \right) = -4 + 0^+ = -4^+$

Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados, o único em que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty \text{ é } 3 - \frac{1}{n}$$



Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = 3 - \frac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Ép. Especial

16. Como

$$\lim(u_n) = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = e$$

Temos que

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \ln x = \ln e = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1999, Prova para militares (prog. antigo)

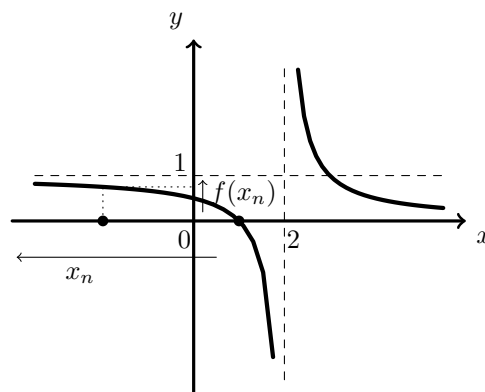
17. Como

$$\lim(x_n) = \lim(2 - n^2) = 2 - \infty = -\infty$$

E como a reta $x = 1$ é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$, temos que

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para 1, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção B**

Exame – 1999, 1ª fase - 1ª chamada (prog. antigo)



18. Como

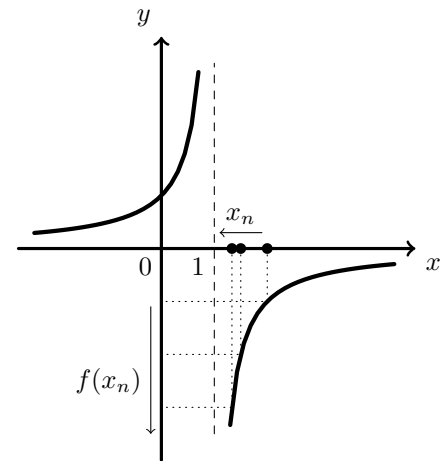
$$\lim(x_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0^+ = 1^+$$

E como a reta $y = 1$ é assintota do gráfico de f , pela observação do gráfico, temos que

$$\lim(u_n) = \lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**



Exame – 1999, Prova modelo (prog. antigo)

19. Como

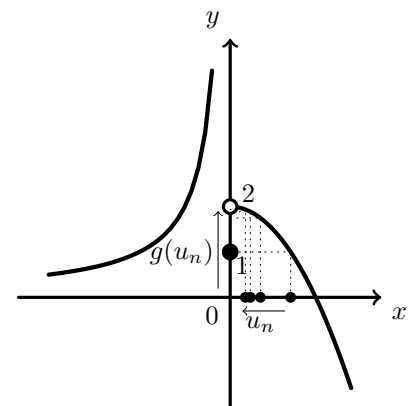
$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0^+$$

Pela observação do gráfico da função g , temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(u_n)$, que tendem para 2, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção C**



Exame – 1998, Prova modelo (prog. antigo)

