COLÉGIO PAULO VI

Ficha de Trabalho **Matemática** **12ºano**

Temas: Trigonometria (Triângulo rectângulo e círculo trigonométrico)

Proposta de correcção

1. Relembrar que um radiano é, em qualquer circunferência, a amplitude do arco que têm comprimento igual ao raio. Sendo assim se o raio da circunferência é 2,5 cm , então um arco de comprimento 2,5 cm tem de amplitude 1 radiano e portanto um arco de comprimento $3 \times 2{,}5\ cm$ tem de amplitude $3\ rad$. (C)

2. Relembrar que os ângulos α e $\alpha + k \times 360º, k \in Z$ têm a mesma representação no círculo trigonométrico, assim como α e $\alpha + k \times 2\pi, k \in Z$ se a unidade for o radiano. Sendo assim, como $-315º = 405º - 2 \times 360º$, os ângulos de amplitudes $-315º$ e $405º$ têm a mesma representação no círculo trigonométrico. (A)

3. Relembrar a tabela de valores exactos das razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{6}\ rad \quad (30º)$, $\frac{\pi}{4}\ rad \quad (45º)$ e $\frac{\pi}{3}\ rad \quad (60º)$ e os ângulos que têm o mesmo seno.

   Em primeiro lugar temos que identificar um ângulo, no intervalo $[0, 2\pi[$, que tenha a mesma representação de $\frac{100}{6}\pi\ rad$.

   Dividindo 100 por 6 obtemos $100 = 6 \times 16 + 4$ logo $\frac{100}{6} = \frac{6 \times 16}{6} + \frac{4}{6}$ e portanto

   $\frac{100}{6}\pi = 16\pi + \frac{4}{6}\pi$ ou seja $\frac{100}{6}\pi$ tem a mesma representação que $\frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$

   (Uma vez que $16\pi = 8 \times 2\pi$)

   Então $sen\left(\frac{100\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{2}{3}\pi\right) = sen\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (A)

4. **A afirmação verdadeira é (A)** uma vez que no 2º quadrante o cosseno é negativo e a tangente é negativa logo o seu produto é positivo.
   (B) É falsa pois no 3º quadrante o seno e o cosseno são negativos.
   (C) É falsa porque $-1 \leq \cos x \leq 1 \ \forall x \in R$.
   (D) É falsa. Basta fazer $tg^{-1}(5) \approx 1{,}37 rad$ ou lembrar que o contradomínio da função tangente é IR.

5. As coordenadas do ponto P, recorrendo ao ângulo α que define no círculo trigonométrico, são $(\cos\alpha; sen\alpha)$. Sendo assim as coordenadas de P são

   $\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right); sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Como $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)=sen\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, as coordenadas de P são, neste caso,

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ (D).

6. (A) Falsa.

Relembrar a fórmula fundamental da trigonometria, $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{5}{9}=1$. Como a afirmação anterior é falsa não existe nenhum ângulo que satisfaça a relação dada.

(B) Verdadeira.

Uma vez que $tg\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, para os valores para os quais está definida, se $sen\alpha\cdot\cos\alpha>0$ então $tg\alpha>0$

(C) Falsa.

Relembrar que a função tangente é crescente em cada intervalo do seu domínio, mas não é crescente no seu domínio. Basta considerar a um ângulo do 1º quadrante e b um ângulo do segundo quadrante e $a<b$ mas $tga>tgb$.

7.

7.1
$$sen210º+\cos150º+tg300º=sen(180º+30º)+\cos(180º-30º)+tg(360º-60º)=$$
$$=-sen(30º)-\cos(30º)-tg(60º)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{-1-\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$$

7.2
$$sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{4}{3}\pi\right)\cdot tg\left(\frac{2\pi}{3}\right)=sen\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot tg\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\sqrt{3}\right)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

7.3
$$\cos(540º)-2\cos(30º)+sen(-135º)=$$
$$=\cos(360º+180º)-2\cos(30º)-sen(135º)=$$
$$=\cos(180º)-2\cos(30º)-sen(180º-45º)=$$
$$=-1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-sen(45º)=-1-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

7.4
$$2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+tg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2\pi)+tg\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=$$
$$=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-tg\left(\frac{\pi}{6}\right)-1+1+tg\left(\frac{\pi}{4}\right)==-2\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+1==-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

8. Relembrar que ao dividir um **hexágono regular** em triângulos, formados por dois vértices consecutivos e pelo centro, obtemos triângulos equiláteros, logo cada um dos ângulos internos desses triângulos tem de amplitude 60º.

8.1 $sen A\hat{O}B = sen 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.2 $\cos A\hat{O}C = \cos(120^{o}) = \cos(180^{o} - 60^{o}) = -\cos(60^{o}) = -\frac{1}{2}$

8.3 $tg A\hat{O}E = tg(180^{o} + 60^{o}) = tg(60^{o}) = \sqrt{3}$

9.

9.1 Seguindo as indicações do enunciado obtemos um triângulo rectângulo cujo cateto adjacente ao ângulo de 25º mede 7 metros.

Para determinar o outro cateto e a hipotenusa temos que recorrer às razões trigonométricas.

Relembrar que, sendo α um ângulo agudo de um triângulo rectângulo,

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}, \quad \cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \quad \text{e} \quad tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Então: $\cos 25^{o} = \frac{7}{x} \Leftrightarrow x = \frac{7}{\cos 25^{o}}$ e $tg 25^{o} = \frac{y}{7} \Leftrightarrow y = 7 tg 25^{o}$

A altura do poste é, então, dada por $\frac{7}{\cos 25^{o}} + 7 tg 25^{o}$ que é aproximadamente 11.

A afirmação é falsa.

9.2 $-2350^{o} = -6 \times 360^{o} - 190^{o}$ logo o ângulo de amplitude -2350º tem a mesma representação do ângulo de amplitude -190º e portanto pertence ao 2º quadrante.

A afirmação é verdadeira.

9.3 Se $sen\alpha \cdot \cos\alpha < 0$ então α pertence ao 2º ou ao 4º quadrante. Uma vez que o seno é decrescente o ângulo α pertence ao 2º quadrante. Nesse quadrante, a tangente é negativa.

A afirmação é falsa.

10.

$$\cos(x - \pi) - \cos(3\pi - x) + sen\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) = -\cos(x) - \cos(2\pi + \pi - x) + sen\left(-2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$$= -\cos(x) - \cos(\pi - x) + sen\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x - (-\cos x) - \cos x = -\cos x + \cos x - \cos x = -\cos x$$

11. $2\cos\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times tg(7\pi + x) - 3sen(5\pi + x) =$

$$= 2\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x) \times tg(x) - 3sen(4\pi + \pi + x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x) \times tg(x) - 3sen(\pi + x) =$$

$$=2sen(x)-\cos(x)\times\frac{senx}{\cos x}-3(-sen(x)) = =2sen(x)-sen(x)+3sen(x) =$$

$$=4sen(x)$$

12. Em primeiro lugar devemos escrever a expressão dada à custa das razões trigonométricas do ângulo β .

$$2sen(\pi+\beta)+\cos(2\pi-\beta)=2(-sen(\beta))+\cos(\beta)=-2sen\beta+\cos\beta$$

Então só temos que determinar o valor exacto de $sen\beta$.

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria,

$$sen^2\beta+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow sen^2\beta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow sen^2\beta=\frac{16}{25} \Leftrightarrow sen\beta=\pm\frac{4}{5}$$

Uma vez que $-\pi<\beta<0$, $sen\beta=-\frac{4}{5}$ logo $-2sen\beta+\cos\beta=-\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$

13. $2senx=-\sqrt{3} \Leftrightarrow senx=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow senx=sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$x=-\frac{\pi}{3}+k\times2\pi \vee x=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+k\times2\pi \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+k\times2\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+k\times2\pi \quad k\in Z$$

$k=0 \quad x=-\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3}$

$k=1 \quad x=\frac{5\pi}{3} \vee x=\frac{10\pi}{3}$ (*não pertence ao intervalo*)

$k=2 \quad x=\frac{11\pi}{3}$ (*não pertence ao intervalo*) $\vee$ - - - -

$k=-1 \quad x=-\frac{7\pi}{3}$ (*não pertence ao intervalo*) $\vee \; x=-\frac{2\pi}{3}$

$k=-2$ - - - - $\vee \; x=-\frac{8\pi}{3}$ (*não pertence ao intervalo*)

As soluções pertencentes ao intervalo $]-\pi,2\pi[$ são: $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$

14.

14.1 $2senx=\sqrt{3} \Leftrightarrow senx=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow senx=sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$x=\frac{\pi}{3}+k\times2\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{3}+k\times2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\times2\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\times2\pi \quad k\in Z$$

14.2 $tgx=-\sqrt{3}=tgx=tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \quad k\in Z$

14.3 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -senx=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow senx=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow senx=sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi \quad k\in Z$$

15. $sen\beta=0 \Leftrightarrow \beta=k\pi \quad k\in Z$ (B)

16. (A) $d(\alpha)=1+\cos\alpha$

17. Sendo $senx=-\frac{1}{3}$, qual das afirmações é verdadeira?

$sen(\pi+x)=-senx=\frac{1}{3}$ Logo (A) é falsa.

$sen^2x+\cos^2x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}+\cos^2x=1 \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$ Logo (B) é falsa.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-senx=\frac{1}{3}$ Logo (C) é falsa.

$sen(\pi-x)=senx=-\frac{1}{3}$ Logo (D) é verdadeira.

18.

$sen(45^o)+\cos(45^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ (A) é verdadeira.

$sen(90^o-\alpha)-\cos\alpha=\cos\alpha-\cos\alpha=0$ (B) é verdadeira.

$tg(135^o)=tg(180^o-45^o)=-tg45^o=-1$ (C) é falsa.

$tg(30^o)+\frac{1}{tg(60^o)}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=2\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) é verdadeira.

19. Seja $\alpha=M\hat{B}C$. Uma vez que o triângulo [BMC] é rectângulo, podemos determinar α recorrendo à sua tangente.

D C

$tg\alpha=\frac{2,5}{5} \Leftrightarrow tg\alpha=0,5$ logo $\alpha=tg^{-1}(0,5)$.

Uma vez que $N\hat{B}A=M\hat{B}C$, $\theta=90^o-2\times tg^{-1}(0,5)$ e portanto, aproximando às unidades, $\theta\approx 37^o$.

A B

20. $sen\alpha=\frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC}=3sen\alpha$

$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB}=3\cos\alpha$

$P_{[ABC]}=3sen\alpha+3\cos\alpha+3$ Na figura está