

12

ÂNGULOS

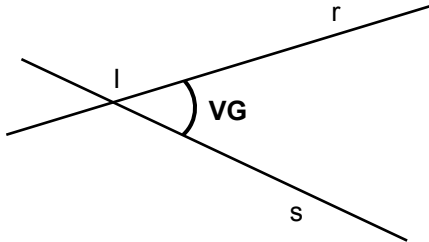
Neste capítulo apresenta-se uma das partes dos Problemas Métricos (a outra é Distâncias). Estudam-se aqui os ângulos entre retas, entre planos e entre retas e planos. Veremos que para se determinar a verdadeira grandeza de um ângulo recorre-se, muitas vezes, aos Métodos Geométricos Auxiliares.

Sumário:

2. Os ângulos no espaço
3. Ângulos entre retas paralelas ao mesmo plano de projeção
- 4 e 5. Ângulos entre retas paralelas ao plano lateral de projeção
6. Ângulo entre duas retas oblíquas
- 7, 8, 9 e 10. Outras situações que se resolvem recorrendo ao triângulo do rebatimento
11. Ângulo entre as retas oblíqua e de perfil
12. Ângulo entre retas enviesadas
13. Ângulos entre planos projetantes do mesmo género
- 14 e 15. Ângulos entre planos perpendiculares ao plano lateral de projeção
16. Ângulos entre o plano de rampa e os planos de projeção e os bissetores
17. Ângulo entre dois planos oblíquos
- 18 e 19. Outras situações que se resolvem utilizando retas perpendiculares aos planos
20. Ângulo entre os planos oblíquo e de rampa
21. Ângulos entre o plano oblíquo e os planos de projeção
22. Ângulos entre o plano oblíquo e os planos bissetores
23. Ângulos entre retas paralelas a um plano de projeção e planos perpendiculares ao mesmo
24. Ângulos entre retas paralelas ao plano lateral de projeção e planos perpendiculares ao mesmo
25. Ângulos entre a reta de perfil e os planos de projeção e os bissetores
26. Ângulo entre a reta oblíqua e o plano oblíquo
- 27 e 28. Outra situação que se resolve utilizando uma reta perpendicular ao plano
29. Ângulo entre a reta oblíqua e o plano de rampa
30. Ângulos entre a reta oblíqua e os planos de projeção e os bissetores
31. Ângulo entre planos definidos por retas
32. Ângulos entre uma reta e planos definidos por retas
- 33, 34 e 35. Exercícios

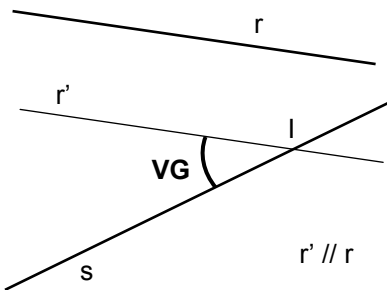
Os ângulos no espaço

Observam-se aqui os ângulos entre retas, entre planos e entre retas e planos no espaço. Nas projeções veremos que a verdadeira grandeza (VG) de um ângulo nem sempre se determina da forma direta e simples que estes imagens aparentam, sendo muitas vezes necessário aplicar processos auxiliares.



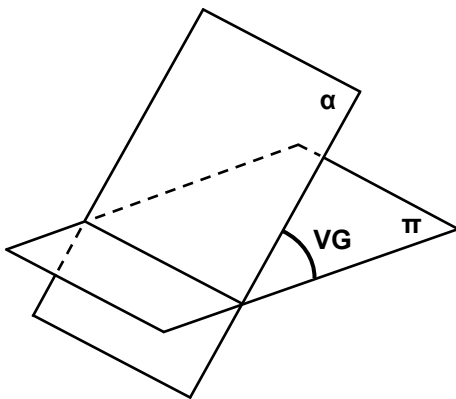
Ângulo entre retas concorrentes

Quando duas retas se cruzam, formam-se quatro ângulos, iguais dois a dois quando não são retos. A VG do ângulo entre duas retas indica-se num dos ângulos de menor abertura.



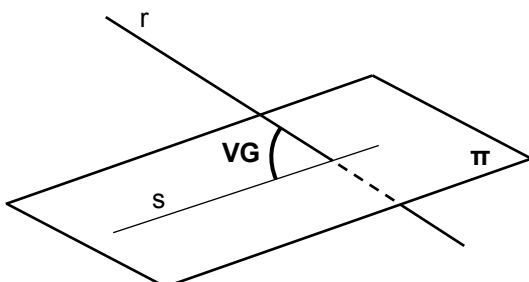
Ângulo entre retas enviesadas

Nos casos em que não é possível determinar diretamente o ângulo entre duas retas enviesadas, faz-se cruzar com uma delas uma reta paralela à outra. O ângulo entre as retas enviesadas é igual ao ângulo entre essas retas concorrentes.



Ângulo entre dois planos

Tal como acontece com as retas, quando dois planos se cruzam formam-se quatro ângulos, iguais dois a dois quando não são retos. A VG do ângulo entre eles indica-se num dos de amplitude menor.

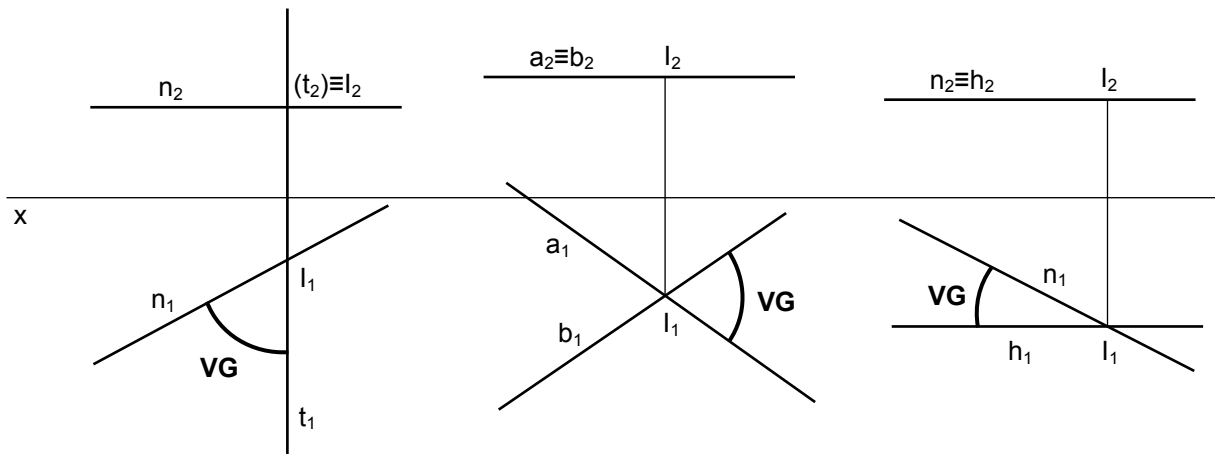


Ângulo entre uma reta e um plano

A VG do ângulo entre uma reta e um plano corresponde à menor amplitude que existe entre as duas figuras. Podemos imaginar a reta s como resultante da intersecção de um plano perpendicular ao plano dado, contendo a reta dada.

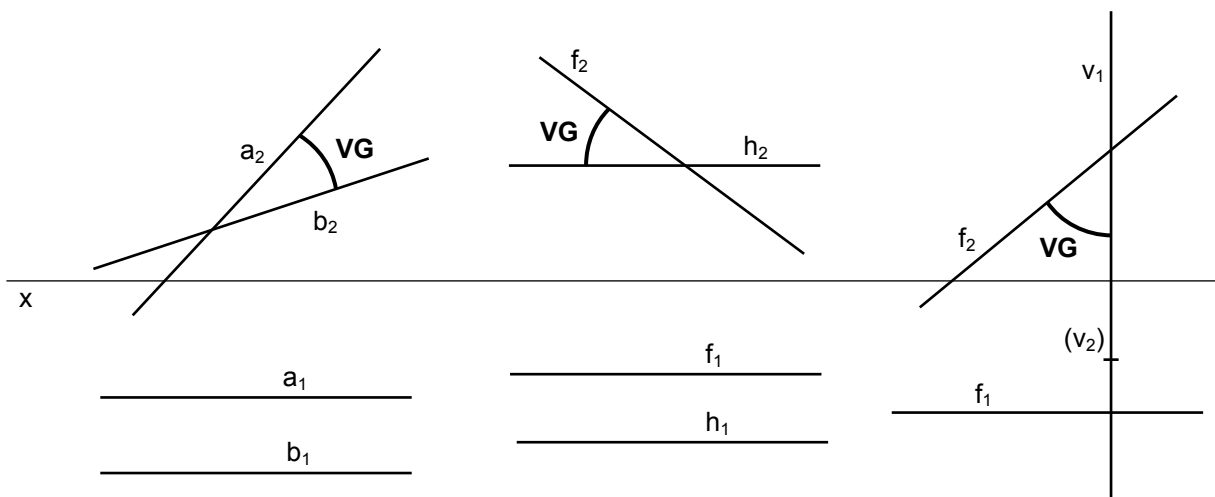
Ângulos entre retas paralelas ao mesmo plano de projeção

Quando duas retas são paralelas ao mesmo plano de projeção, a verdadeira grandeza do ângulo formado por elas determina-se diretamente. Isso é válido tanto para retas concorrentes como para retas enviesadas.



Retas paralelas ao plano horizontal de projeção

A VG do ângulo entre duas retas paralelas ao PHP determina-se diretamente nas suas projeções horizontais. Nestes exemplos os pares de retas que se apresentam são concorrentes, estando sempre presente a reta horizontal. As mesmas situações podem ser apresentadas com retas enviesadas.

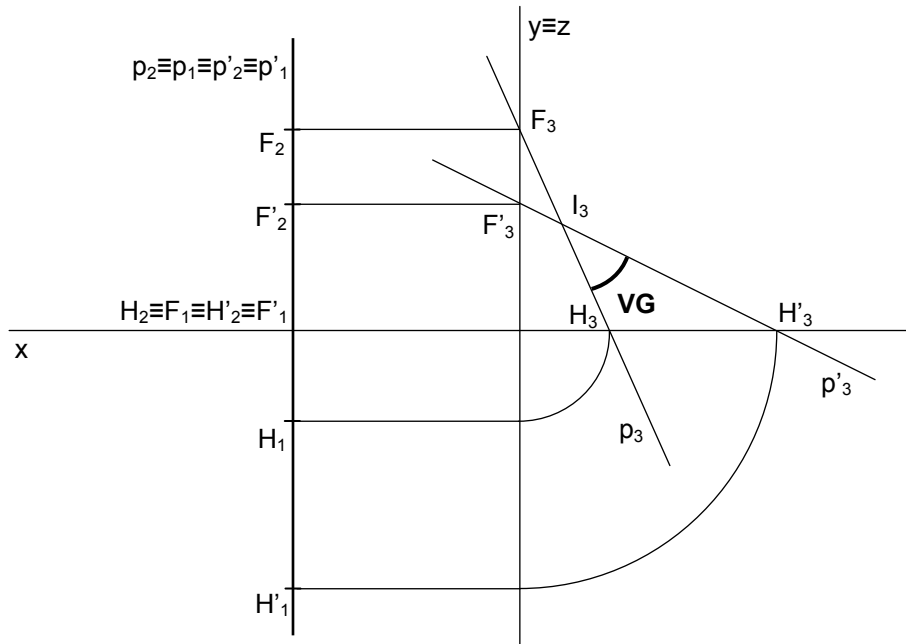


Retas paralelas ao plano frontal de projeção

A VG do ângulo entre duas retas paralelas ao PFP determina-se diretamente nas suas projeções frontais. Nestes exemplos apresentam-se pares de retas enviesadas, estando sempre presente a reta frontal. As mesmas situações podem ser apresentadas com retas concorrentes.

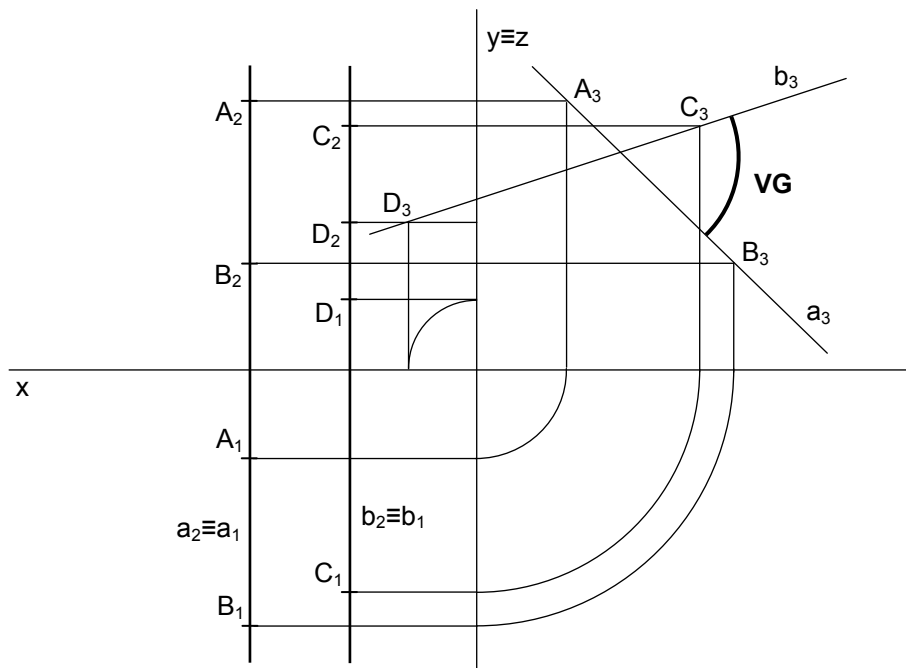
Ângulos entre retas paralelas ao plano lateral de projeção

Quando duas retas são paralelas ao plano lateral de projeção, a verdadeira grandeza do ângulo por elas formado é determinado na projeção lateral. Os exemplos desta página mostram apenas situações que envolvem retas de perfil.



Ângulo entre duas retas de perfil concorrentes

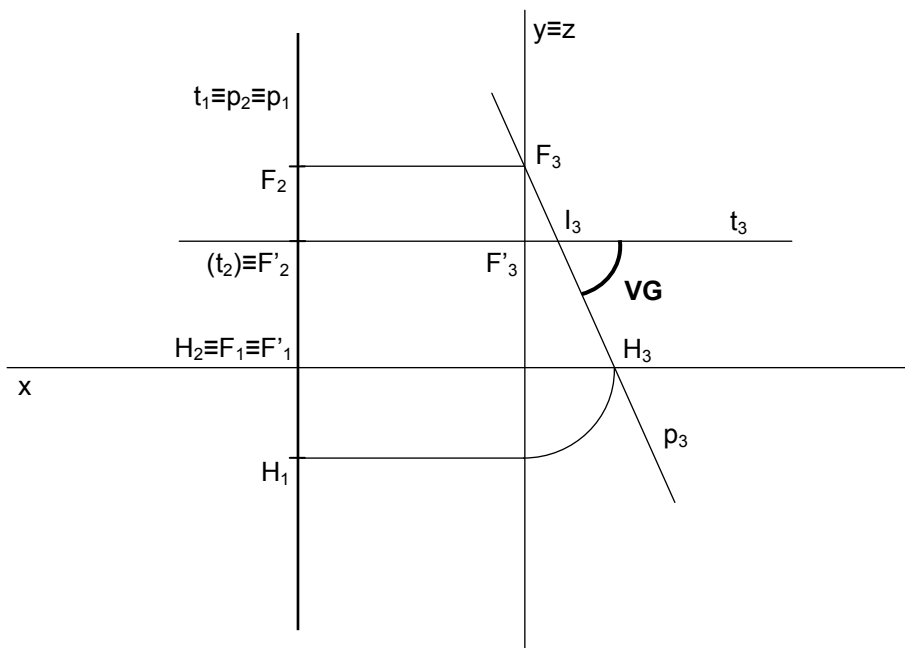
As retas que aqui se mostram estão definidas pelos seus traços. l_3 é a projeção lateral do ponto de intersecção; não se representam aqui as projeções horizontal e frontal desse ponto por não serem necessárias.



Ângulo entre duas retas de perfil enviesadas

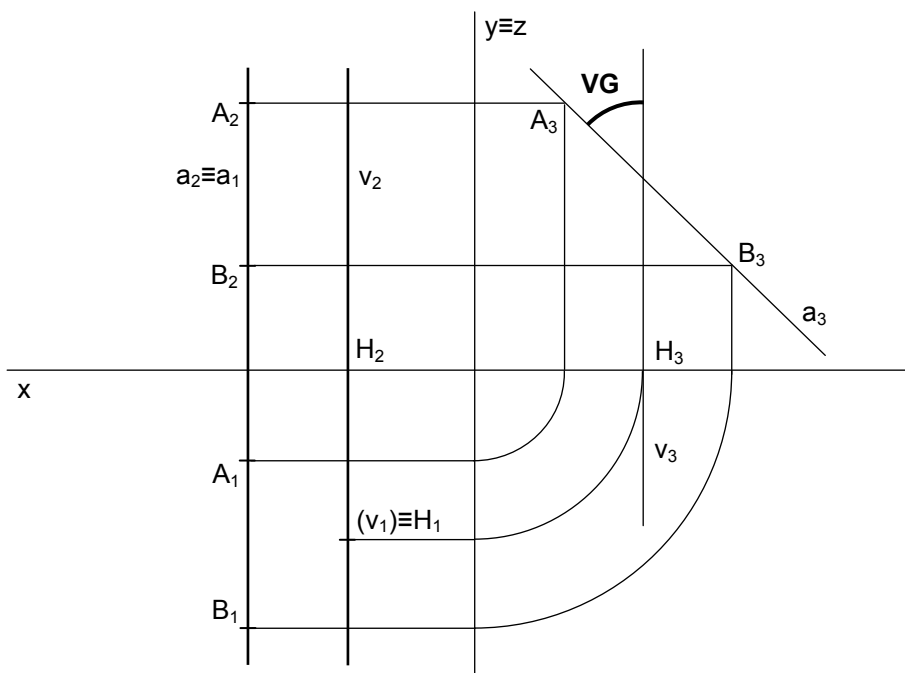
As retas que aqui se mostram estão definidas por pontos que não são os traços. Tratando-se de retas concorrentes, o modo de resolver seria idêntico.

Aqui mostra-se o processo observado na página anterior, aplicado a situações que envolvem a reta de perfil com as retas de topo e vertical, uma vez que também essas retas são paralelas ao plano lateral de projeção.



Ângulo entre uma reta de perfil e uma reta de topo

As retas que aqui se mostram têm o mesmo valor de abscissa, pelo que são concorrentes. I_3 é a projeção lateral do ponto de intersecção; não se representam aqui as projeções horizontal e frontal desse ponto por serem desnecessárias.

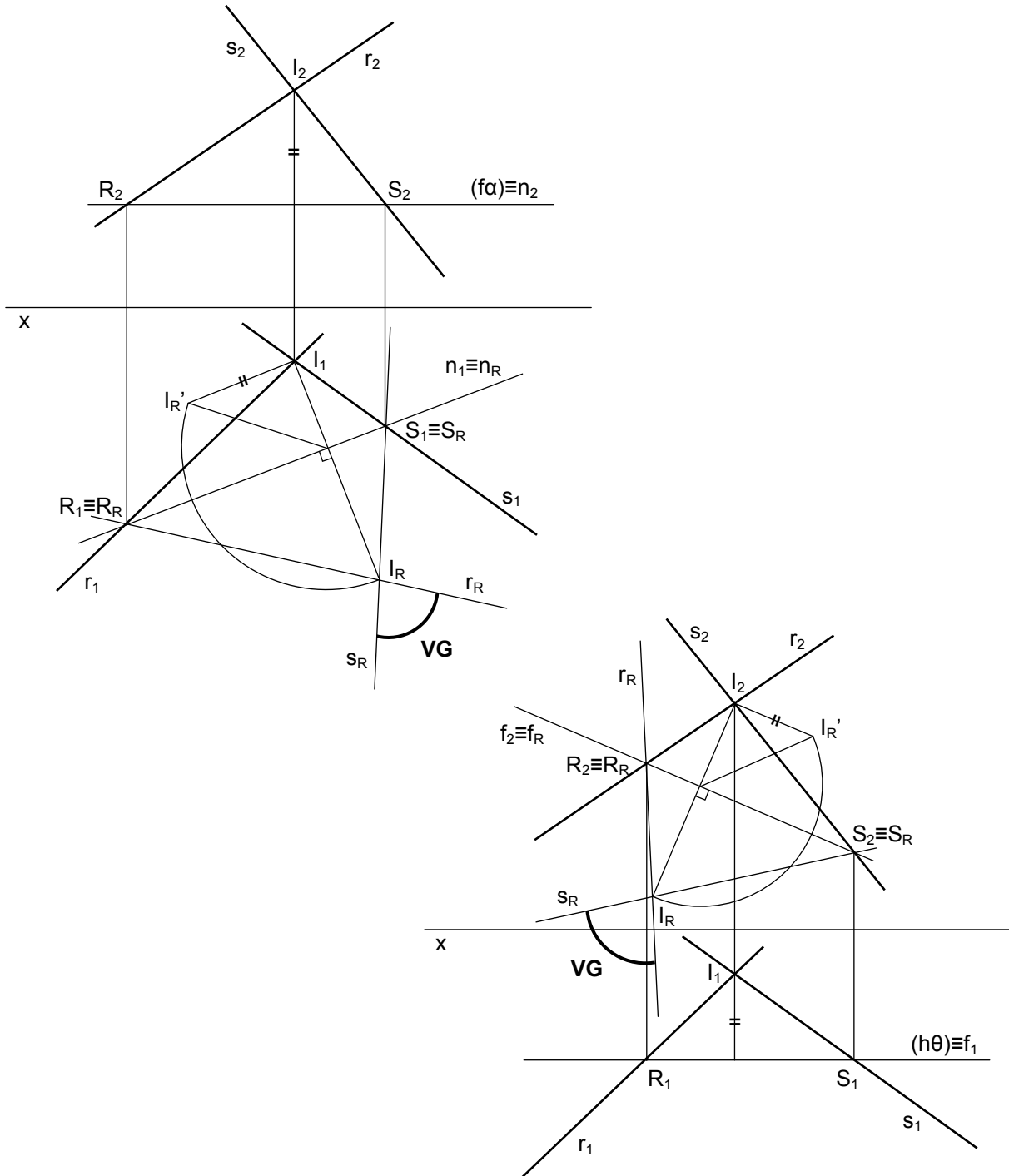


Ângulo entre uma reta de perfil e uma reta vertical

As retas que aqui se mostram são enviesadas, estando a reta de perfil definida por dois pontos que não são os seus traços. Sendo as retas concorrentes, o modo de resolver será idêntico.

Ângulo entre duas retas oblíquas

Quando duas retas são oblíquas, a verdadeira grandeza do ângulo entre elas determina-se rebatendo as retas sobre um plano horizontal ou frontal, recorrendo ao processo do triângulo do rebatimento. Este processo está explicado no capítulo Métodos Geométricos Auxiliares, na parte relativa aos rebatimentos.

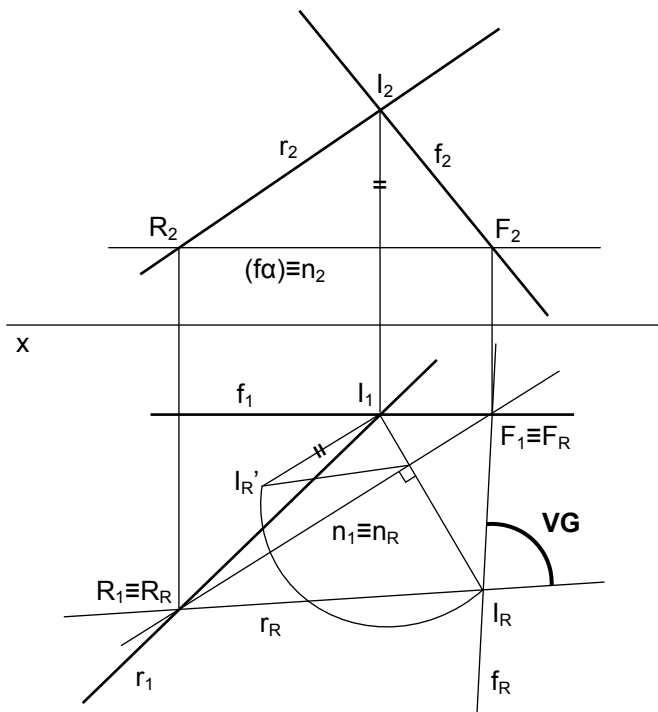


Ângulo entre duas retas oblíquas

Aqui resolve-se a mesma situação duas vezes, a primeira rebatendo as retas sobre um plano horizontal, a segunda sobre um plano frontal.

Outras situações que se resolvem recorrendo ao processo do triângulo do rebatimento

Quando uma reta é oblíqua e outra é frontal ou horizontal surgem duas maneiras de resolver o exercício. Numa delas utiliza-se um plano que corta ambas as retas, na outra usa-se a reta frontal ou horizontal como charneira.



Ângulo entre as retas oblíqua e frontal

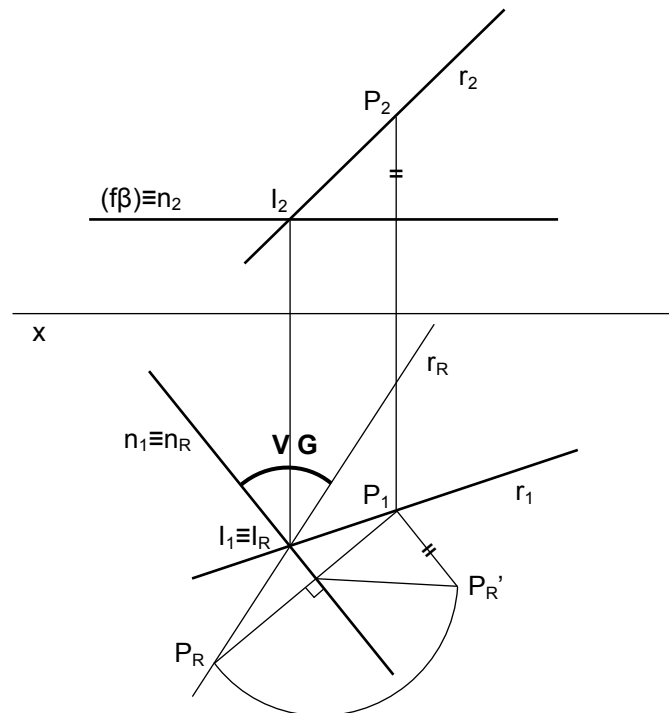
Utilizando um plano horizontal, esta situação fica idêntica à que envolve duas retas oblíquas.

Se se utilizar um plano frontal contendo a reta frontal, esta será a charneira, apenas rebatendo a reta oblíqua, como sucede com a opção tomada no exercício seguinte, em que se utilizou um plano horizontal contendo a reta horizontal.

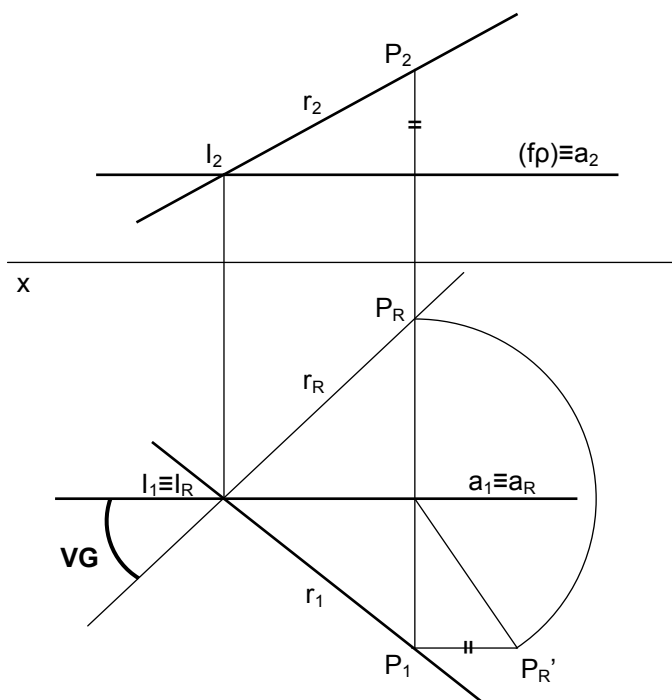
Ângulo entre as retas oblíqua e horizontal

Utilizando um plano horizontal que contém a reta horizontal, esta serve de charneira; assim sendo, apenas rebate a reta oblíqua, com a ajuda do ponto P, já que nesta situação o ponto I é fixo.

Se se utilizar um plano frontal, resulta uma charneira frontal, o que dará uma situação idêntica à do exercício de cima, mas com o traçado do rebatimento na projeção frontal.



Quando uma das retas é oblíqua e a outra fronto-horizontal, ou se apresentam juntas as retas horizontal e frontal, estamos perante situações em que nenhum plano (horizontal ou frontal) corta simultaneamente as duas retas. Assim, sugere-se a utilização de uma das retas como charneira.



Ângulo entre as retas oblíqua e fronto-horizontal

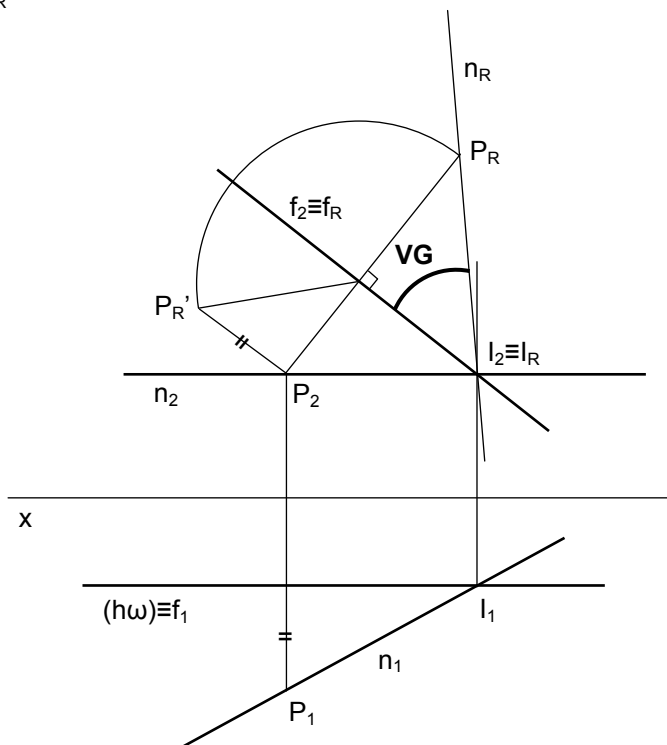
Aqui utiliza-se um plano horizontal contendo a reta fronto-horizontal, que fica como charneira do rebatimento. Apenas a reta oblíqua rebate, com ajuda do ponto P. A linha perpendicular à charneira, que parte de P1, fica aqui oculta pela linha de chamada desse ponto.

Com um plano frontal contendo a mesma reta, o resultado seria idêntico, mas com o traçado do rebatimento na projeção frontal.

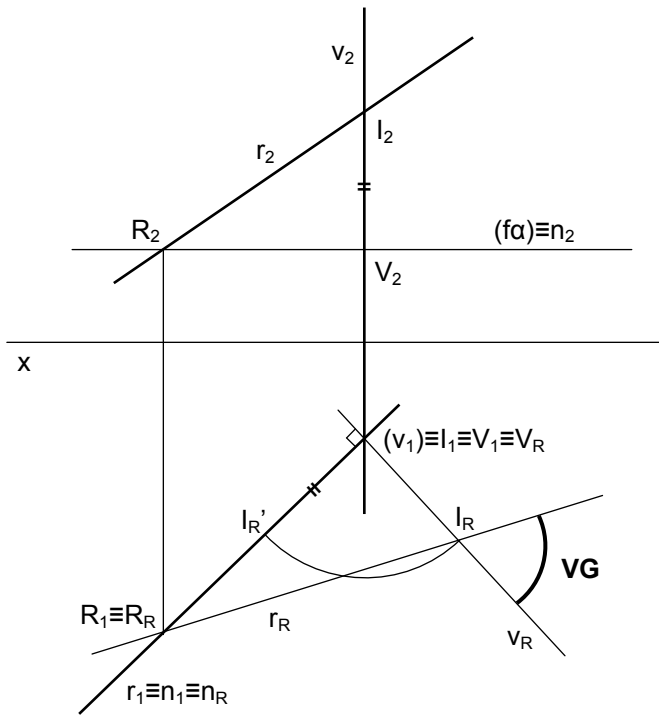
Ângulo entre as retas horizontal e frontal

Aqui utiliza-se um plano frontal contendo a reta frontal, charneira do rebatimento. Apenas a reta horizontal rebate, com ajuda do ponto P.

Com um plano horizontal contendo a reta horizontal, o resultado seria idêntico, mas com o traçado do rebatimento na projeção horizontal.



As situações que aqui se apresentam também podem ser resolvidas ora com um plano cortando as duas retas, ora utilizando a reta projetante como charneira.

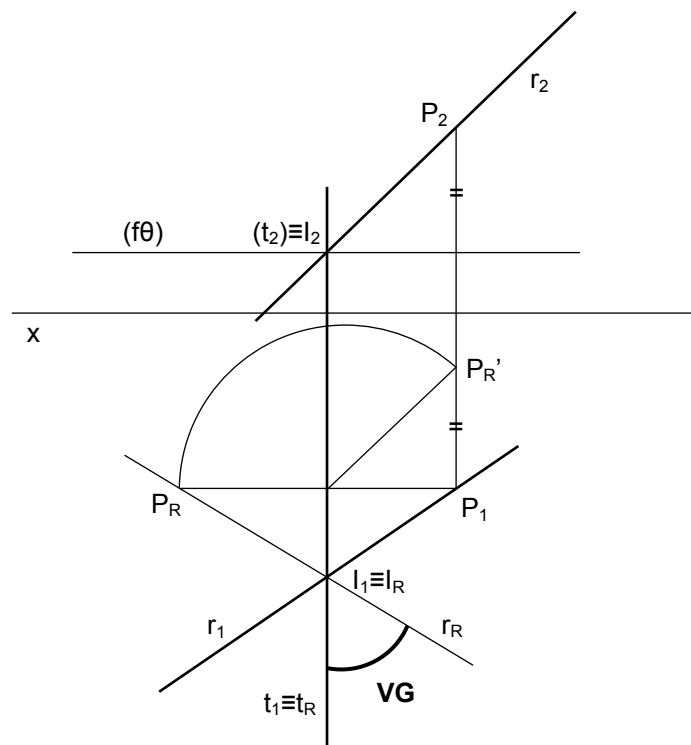


Ângulo entre as retas oblíqua e vertical

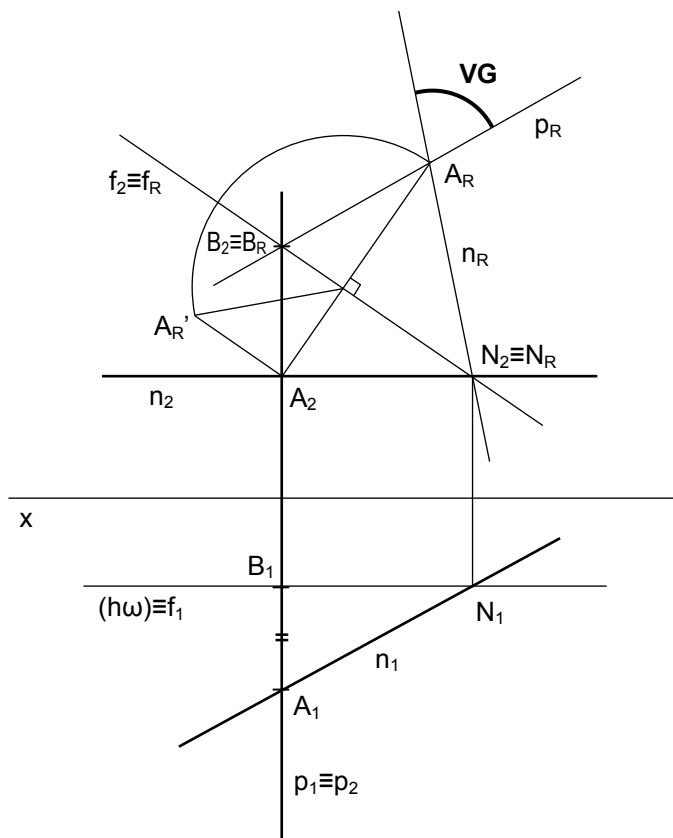
Aqui utiliza-se um plano horizontal que ao cortar as retas, dá origem a uma charneira horizontal. Neste caso, a linha que se traça paralela à charneira coincide com ela, pelo que o triângulo do rebatimento fica reduzido ao segmento de reta $[I_1I_R]$. Pode utilizar-se um plano frontal fazendo da reta vertical a charneira. Nesse caso o exercício ficaria idêntico ao de baixo, mas com o traçado do rebatimento na projeção frontal.

Ângulo entre as retas oblíqua e de topo

Aqui o plano contém a reta de topo, sendo esta a charneira. Assim sendo, apenas rebatete a reta oblíqua, com ajuda do ponto P. De notar que a linha perpendicular à charneira fica, neste caso, paralela ao eixo x. Pode utilizar-se um plano frontal cortando as duas retas, de onde resultará uma charneira frontal. Nesse caso o exercício seria idêntico ao de cima, mas com o traçado do rebatimento na projeção frontal.



As situações que aqui se mostram envolvem a reta de perfil, sem que haja necessidade de recorrer à sua projeção lateral. Pode também utilizar-se a reta horizontal ou a frontal como charneira.



Ângulo entre as retas de perfil e horizontal

A reta de perfil está definida pelos pontos A e B, sendo A a intersecção com a reta horizontal.

Utiliza-se um plano horizontal que corta a reta p em B e a n em N, que definem a charneira frontal f. A partir daqui aplica-se o triângulo do rebatimento da forma habitual.

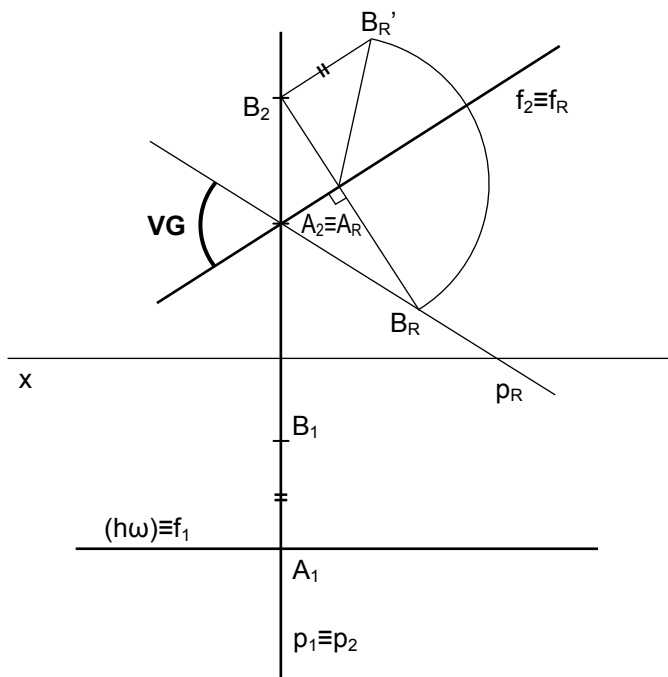
Pode também ser utilizado o plano horizontal contendo a reta horizontal, que será charneira. Desse modo apenas a reta de perfil rebate. Será uma situação idêntica à do exercício seguinte, mas com o traçado do rebatimento feito na projeção horizontal.

Ângulo entre as retas de perfil e frontal

A reta de perfil está definida pelos pontos A e B, sendo A a intersecção com a reta frontal.

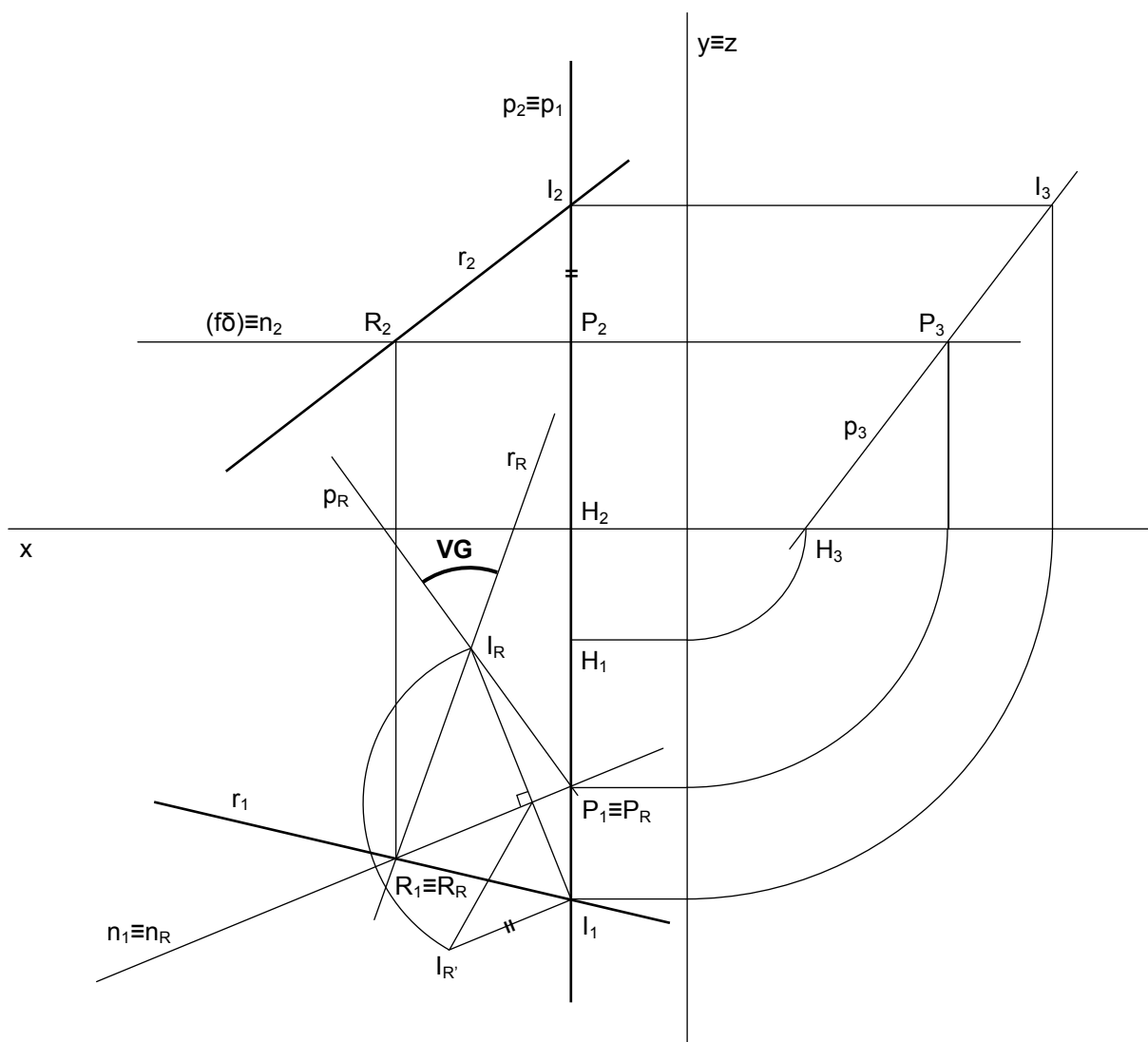
Utiliza-se um plano frontal contendo a reta frontal, que fica como charneira. Assim sendo, apenas a reta de perfil rebate, com ajuda do ponto B.

Pode também ser utilizado o plano horizontal cortando as duas retas. Desse modo apenas a reta de perfil rebate. Será uma situação idêntica à do exercício anterior, mas com o traçado do rebatimento feito na projeção horizontal.



Ângulo entre as retas oblíqua e de perfil

A determinação do ângulo entre uma reta oblíqua e uma de perfil, pode ser mais complexa do que as observadas nas páginas anteriores, caso obrigue à utilização de um processo auxiliar, como sucede no caso que aqui se apresenta.



Ângulo entre as retas oblíqua e de perfil

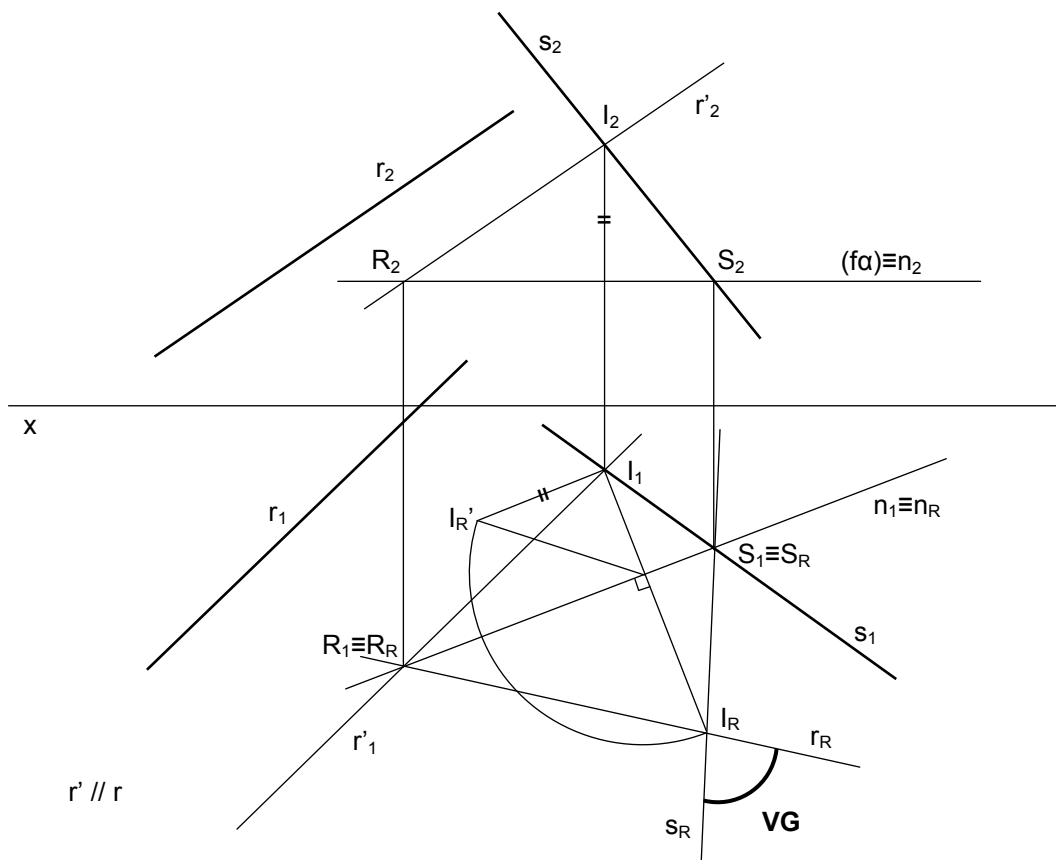
Aqui a reta de perfil está definida pelo ponto I, de intersecção com a reta oblíqua, e pelo seu traço horizontal. O plano horizontal corta a reta r no ponto R e a p no ponto P. Para determinar a projeção horizontal de P recorre-se à projeção lateral da reta de perfil.

Se em vez do ponto H, fosse dado o ponto P da reta de perfil (ou outro idêntico), não haveria necessidade de recorrer à projeção lateral da reta.

Neste caso em concreto, podia ter-se utilizado o próprio PHP para rebater as retas, utilizando desse modo os traços horizontais de ambas as retas, já que o da reta oblíqua existe dentro do espaço disponível. Contudo, procedeu-se deste modo, recorrendo às projeções laterais, já que os enunciados poderão não deixar acesso (devido às medidas dadas) a um dos traços de uma ou de ambas as retas. Ora, isso inviabiliza a utilização de qualquer dos planos de projecção como plano sobre o qual efetuar o rebatimento.

Ângulo entre retas enviesadas

Mostra-se aqui como se determina o ângulo entre duas retas enviesadas oblíquas. Por comparação com este exemplo, e através do estudo dos ângulos entre outras retas, facilmente se adapta este procedimento a essas outras.

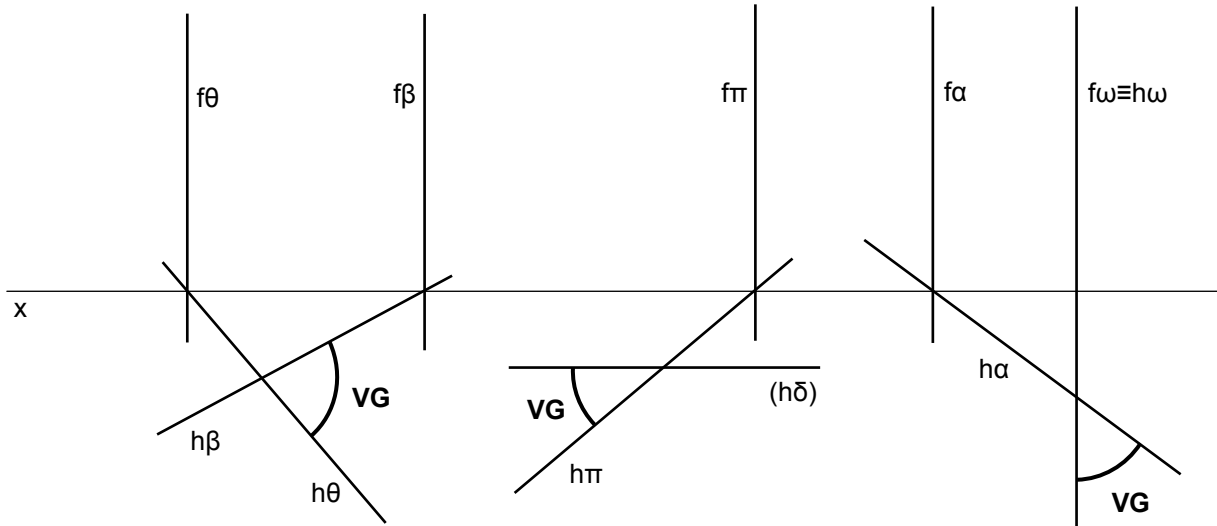


Ângulo entre retas oblíquas enviesadas

Para determinar o ângulo entre as retas r e s , enviesadas, fez-se cruzar por s uma reta r' , paralela a r . De seguida determinou-se o ângulo entre essas retas concorrentes, que é igual ao das retas enviesadas.

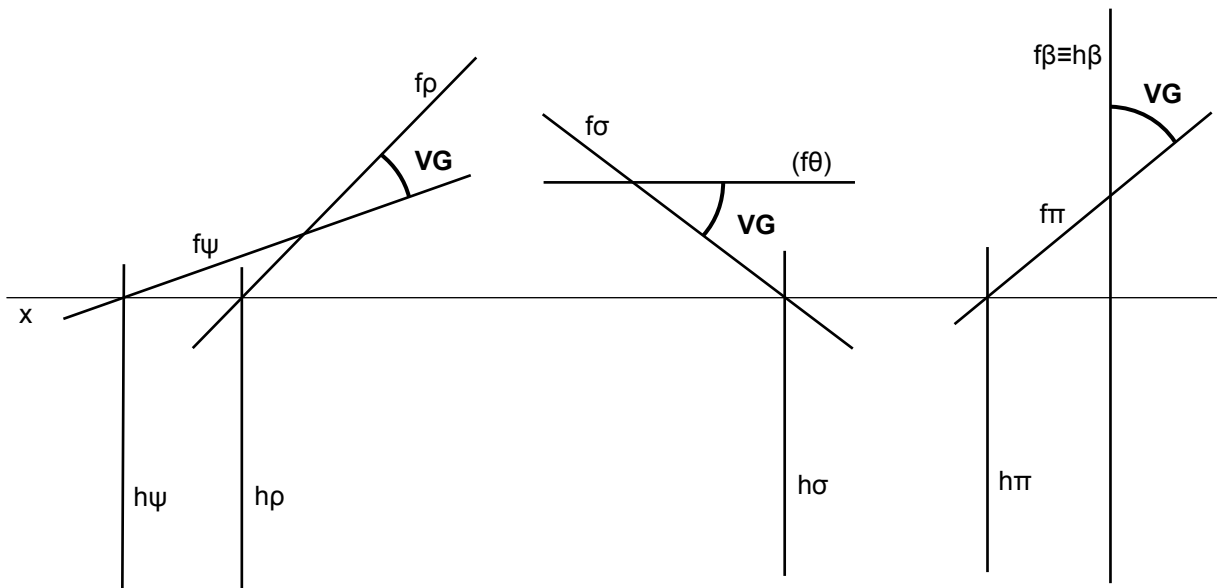
Ângulos entre planos projetantes do mesmo género

A verdadeira grandeza do ângulo entre dois planos projetantes pode-se determinar diretamente se ambos os planos forem projetantes horizontais ou projetantes verticais.



Planos projetantes horizontais

A VG do ângulo entre planos projetantes horizontais determina-se entre os seus traços horizontais. Nestes exemplos estão sempre presentes planos verticais.

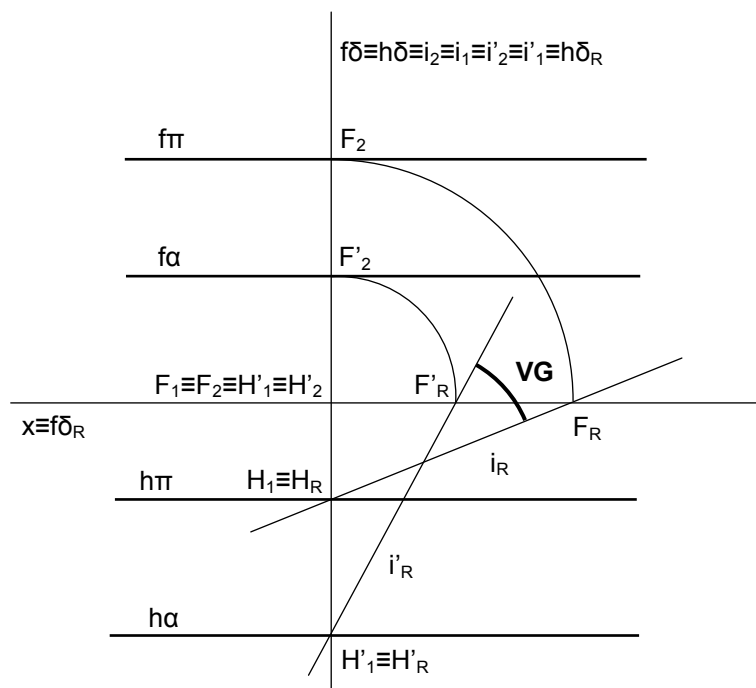
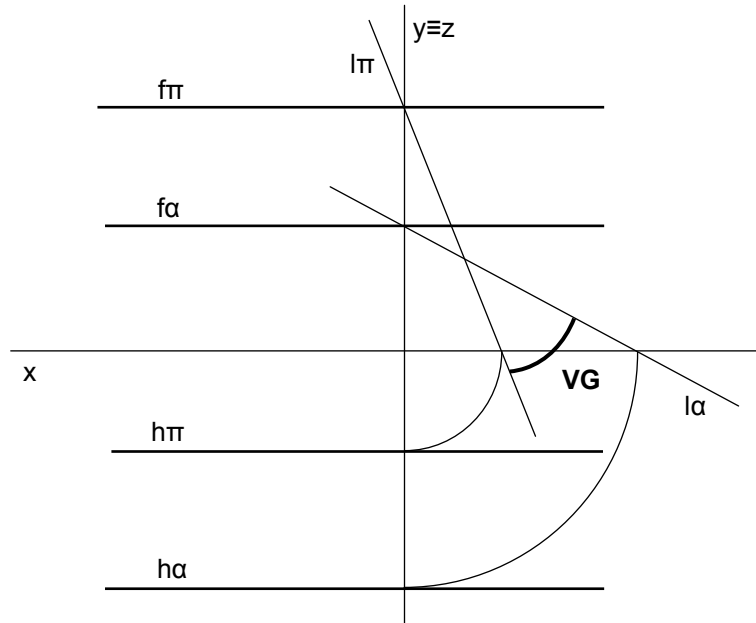


Planos projetantes frontais

A VG do ângulo entre planos projetantes frontais determina-se entre os seus traços frontais. Em todos estes exemplos estão presentes planos de topo.

Ângulos entre planos perpendiculares ao plano lateral de projeção

Nesta página mostra-se como se determina a verdadeira grandeza do ângulo entre dois planos de rampa, por dois processos.

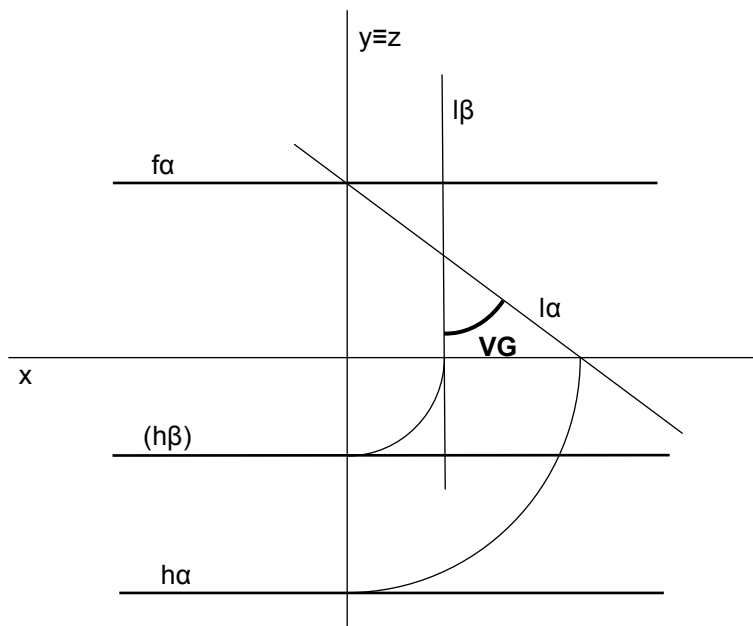


Ângulo entre os planos de rampa

Na primeira situação recorre-se aos traços laterais dos planos. Como os planos de rampa são perpendiculares ao plano lateral de projeção, o ângulo entre os seus traços laterais está em verdadeira grandeza.

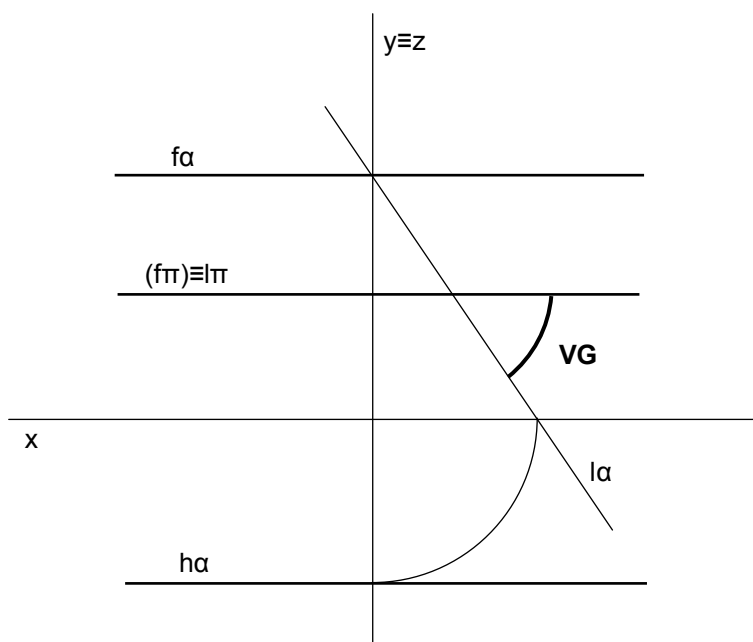
Na segunda situação recorre-se ao rebatimento de um plano de perfil. As retas de perfil segundo as quais ele corta os planos dados formam um ângulo igual ao desses planos.

Aqui determina-se a verdadeira grandeza do ângulo entre o plano de rampa e os planos frontal e horizontal, recorrendo aos traços laterais. Estes exercícios podem também ser resolvidos através do rebatimento de um plano de perfil, como na página anterior, ou através de outro método geométrico auxiliar.



Ângulo entre um plano de rampa e um plano frontal

Tratando-se de dois planos perpendiculares ao plano lateral de projeção, o ângulo entre os seus traços laterais corresponde à VG do ângulo entre os planos.

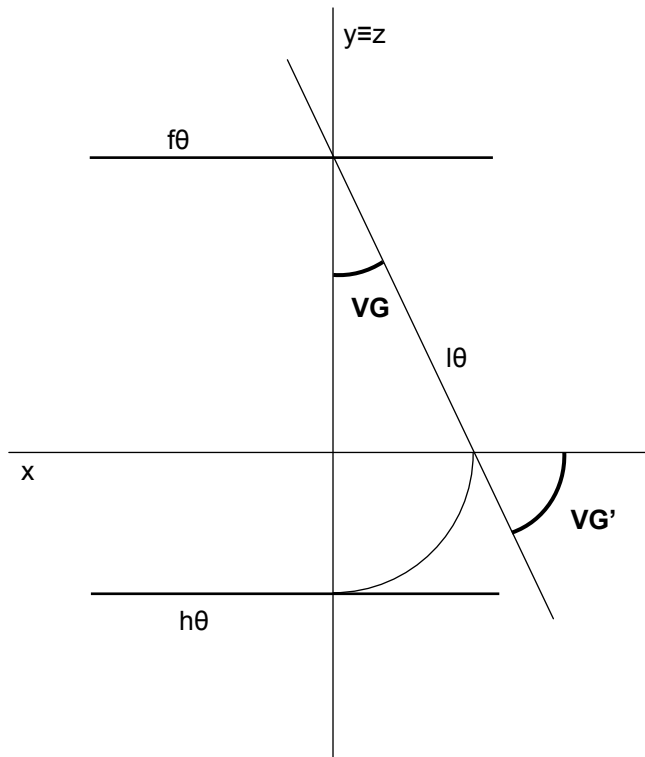


Ângulo entre um plano de rampa e um plano horizontal

Também aqui se indica a VG do ângulo entre os planos nos seus traços laterais.

Ângulos entre o plano de rampa e os planos de projeção e os bissetores

Aqui determina-se o ângulo que o plano de rampa faz com cada um dos planos de projeção e cada um dos planos bissetores, recorrendo aos seus traços laterais.

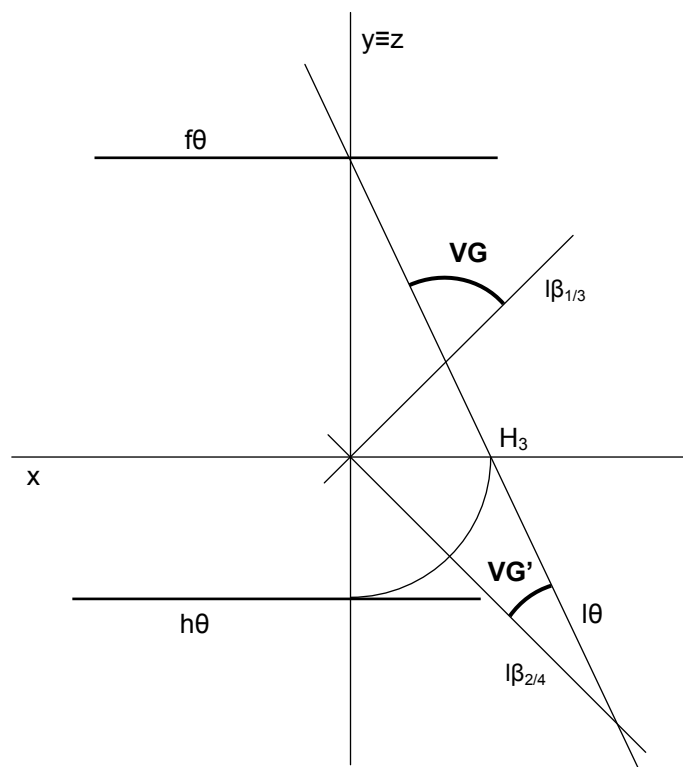


Ângulo entre o plano de rampa e os planos de projeção

A VG do ângulo que o plano faz com o PHP está indicado entre o seu traço lateral e o eixo x, o que faz com o PFP está indicado junto dos eixos y=z.

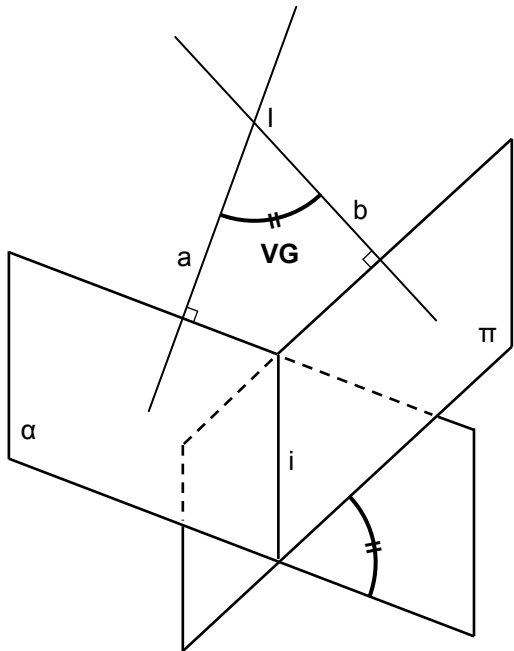
Ângulo entre o plano de rampa e os planos bissetores

A VG do ângulo que o plano faz com o $\beta_{1/3}$ está indicado entre o seu traço lateral e o traço lateral desse bissetor, o mesmo sucede com o $\beta_{2/4}$.



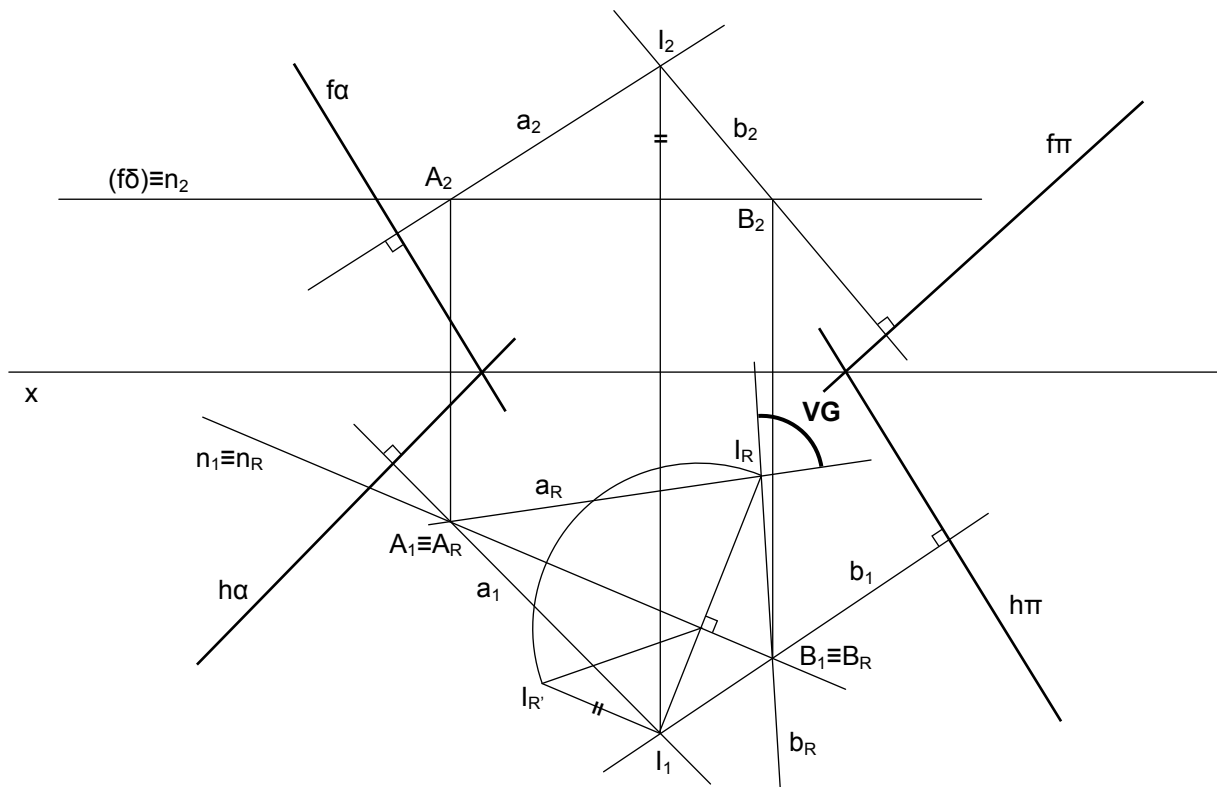
Ângulo entre dois planos oblíquos

Todas as situações que não se resolvem diretamente, nem com recurso aos traços laterais dos planos, resolvem-se recorrendo a retas perpendiculares aos planos, uma vez que o ângulo entre elas é igual ao ângulo entre os planos.



As retas perpendiculares aos planos, no espaço

O processo mais fácil para determinar o ângulo entre dois planos (excetuando as situações estudadas anteriormente) consiste em determinar o ângulo entre duas retas que sejam perpendiculares aos planos dados. O valor do ângulo entre as retas é o mesmo que existe entre os planos. Veremos, na imagem seguinte, que não é necessário determinar a reta de intersecção i , entre os planos.

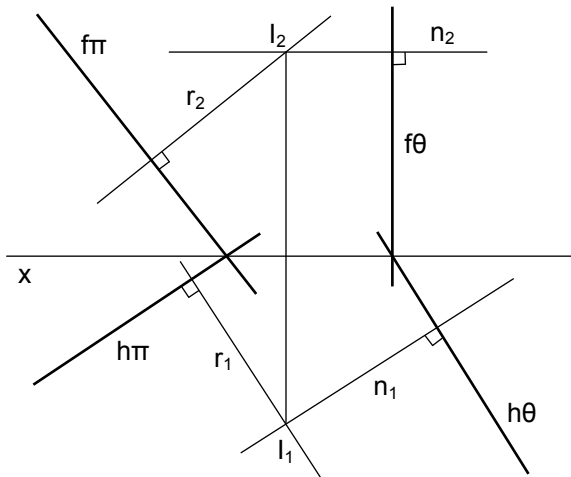


Ângulo entre dois planos oblíquos

Traçando duas retas concorrentes, cada uma perpendicular a um plano, determina-se a VG do ângulo entre essas retas, já que o seu valor é igual ao do ângulo entre os planos.

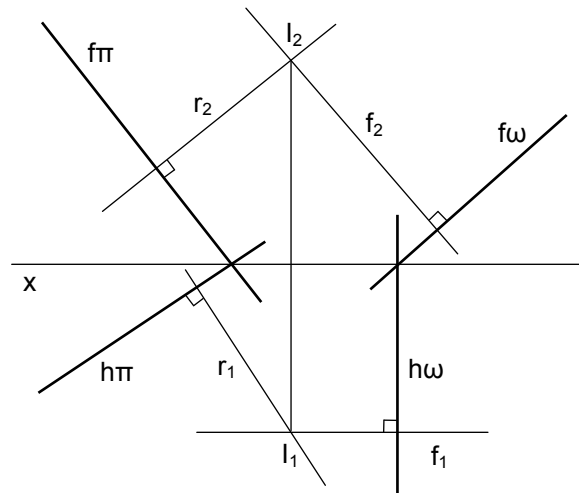
Outras situações que se resolvem utilizando retas perpendiculares aos planos

Aqui mostram-se outras situações que se resolvem recorrendo a retas perpendiculares aos planos. Contudo, os traçados estão apenas iniciados, dado que a determinação dos ângulos entre as retas daqui resultantes foi já abordada aquando do estudo dos ângulos entre retas.



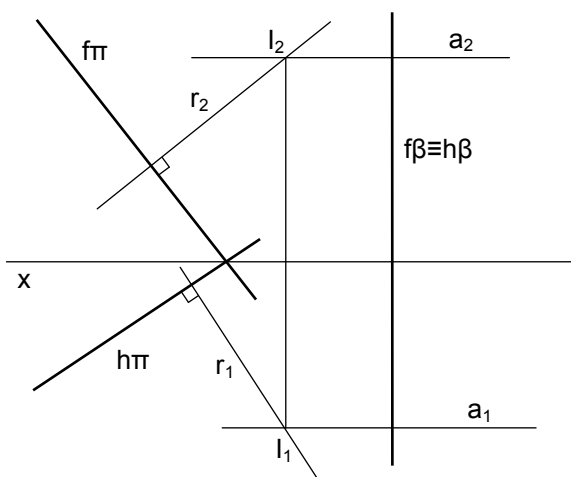
Ângulo entre os planos oblíquo e vertical

As retas perpendiculares a estes planos são a oblíqua e a horizontal.



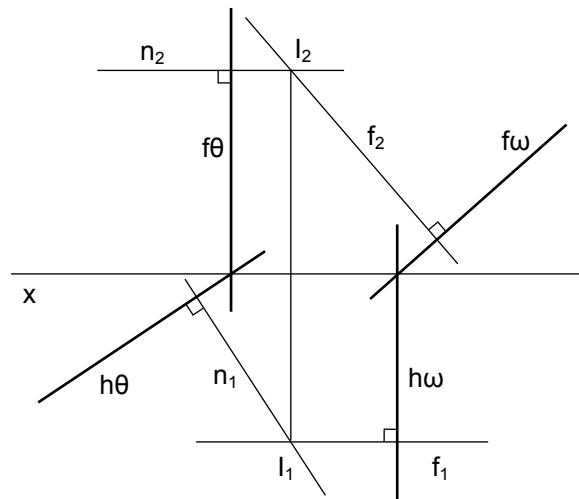
Ângulo entre os planos oblíquo e de topo

As retas perpendiculares a estes planos são a oblíqua e a frontal.



Ângulo entre os planos oblíquo e de perfil

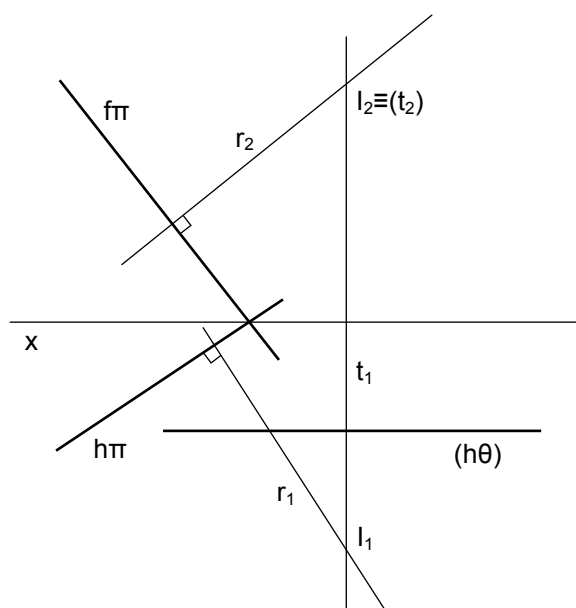
As retas perpendiculares a estes planos são a oblíqua e a fronto-horizontal.



Ângulo entre os planos vertical e de topo

As retas perpendiculares a estes planos são a horizontal e a frontal.

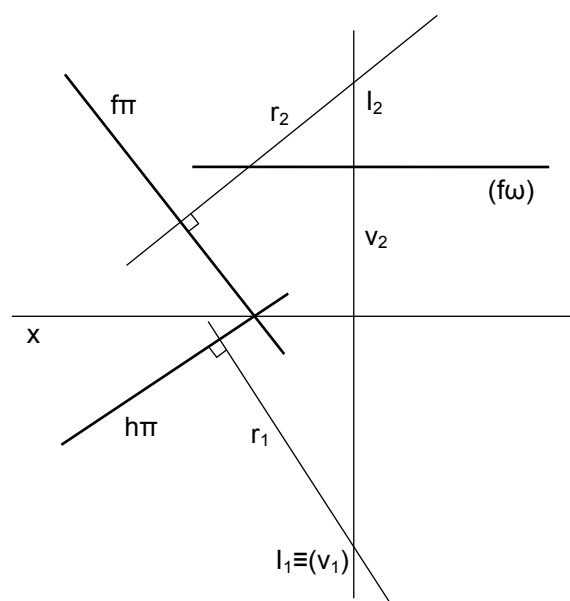
Mostram-se aqui mais situações que se resolvem recorrendo a retas perpendiculares aos planos, também sem os exercícios resolvidos até ao fim.



Ângulo entre os planos oblíquo e frontal

As retas perpendiculares a estes planos são a oblíqua e de topo.

Este processo pode também ser utilizado para a determinação do ângulo entre o plano oblíquo e o PFP.



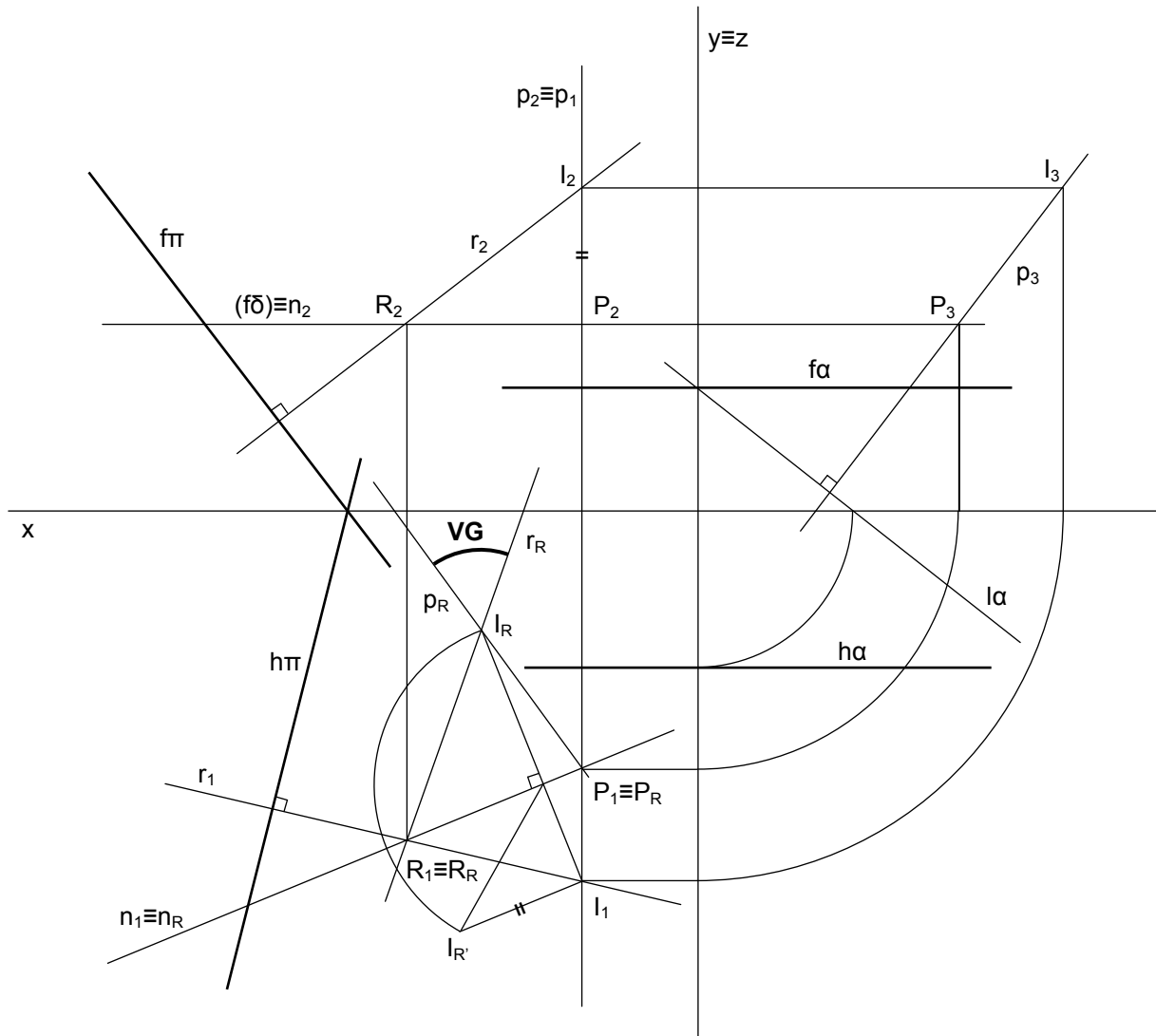
Ângulo entre os planos oblíquo e horizontal

As retas perpendiculares a estes planos são a oblíqua e a vertical.

Este processo pode também ser utilizado para a determinação do ângulo entre o plano oblíquo e o PHP.

Ângulo entre os planos oblíquo e de rampa

Esta situação resolve-se também recorrendo a retas perpendiculares aos planos. Contudo, apresenta-se como a mais complexa, dado que a reta perpendicular ao plano de rampa é de perfil, o que implica recorrer à sua projecção lateral, por exemplo.

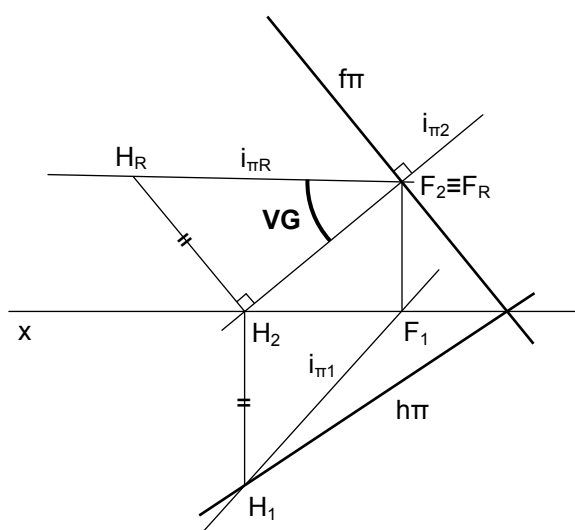
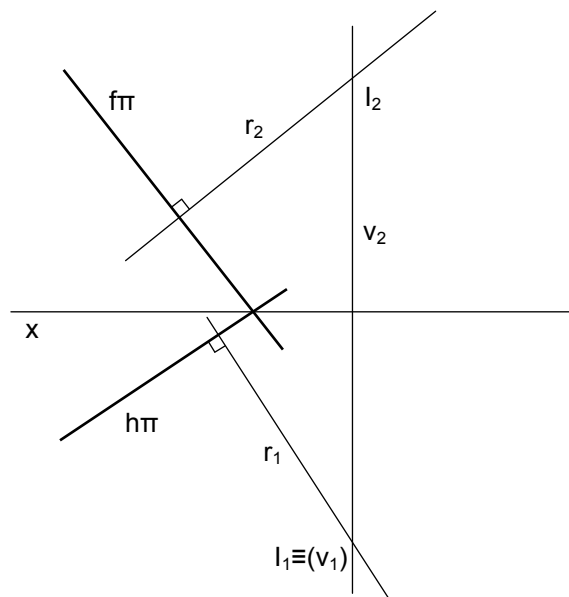
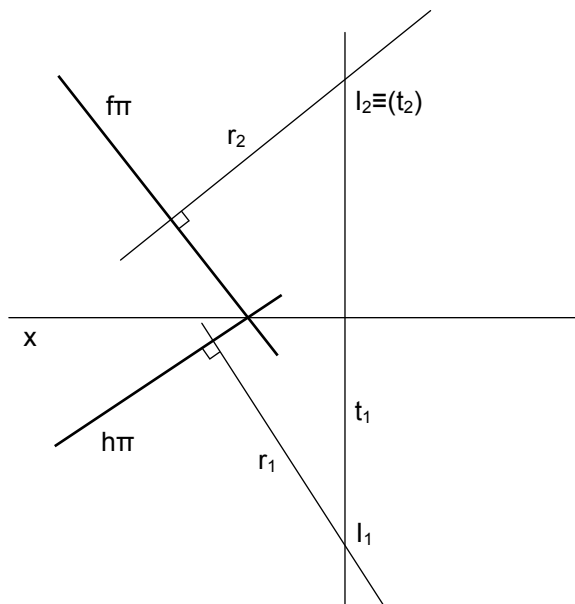


Ângulo entre os planos oblíquo e de rampa

Depois de se traçarem as retas r e p , respetivamente perpendiculares aos planos π e α , traçou-se o plano horizontal δ , que corta essas retas nos pontos R e P . Contudo, não sendo possível indicar directamente a projecção horizontal do ponto P , por se encontrar numa recta de perfil, esta determina-se através da sua projecção lateral. De notar que, para que a recta de perfil seja perpendicular ao plano de rampa, a sua projecção lateral tem de ser perpendicular ao traço lateral desse plano.

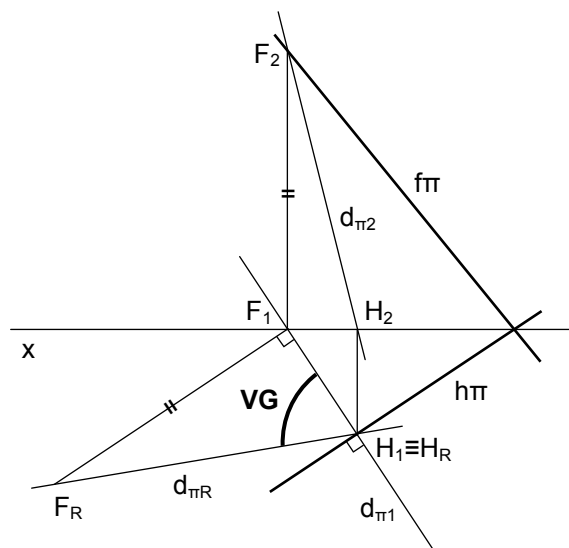
Ângulos entre o plano oblíquo e os planos de projeção

Mostram-se aqui dois processos para determinar a verdadeira grandeza do ângulo entre um plano oblíquo e os planos de projeção. Em cima recorre-se a retas perpendiculares aos planos (os traços estão apenas iniciados); em baixo recorre-se às retas de maior declive e de maior inclinação.



Ângulo entre o plano oblíquo e o plano frontal de projeção

Em cima traça-se uma reta perpendicular ao plano oblíquo e outra ao PFP. De seguida basta determinar o ângulo entre essas retas. Em baixo rebate-se uma reta de maior inclinação para o PFP. A VG do ângulo situa-se entre a reta rebatida e a sua projeção frontal.



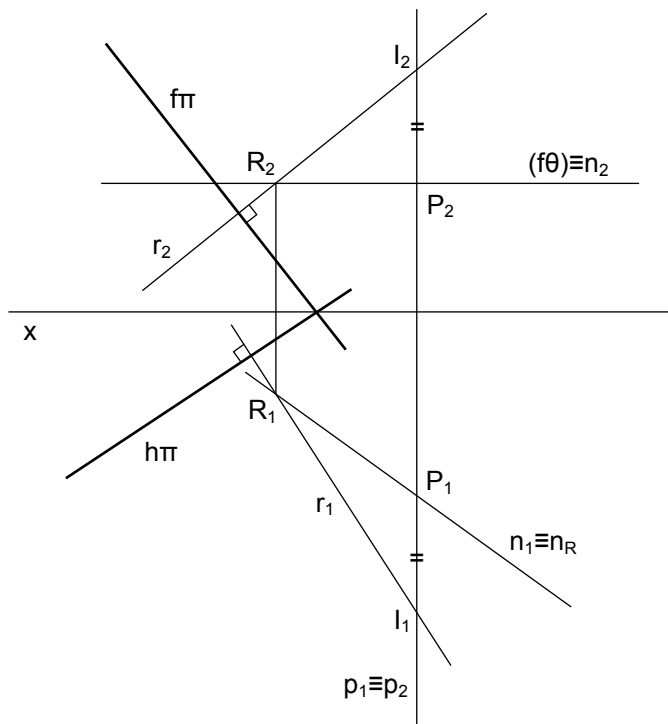
Ângulo entre o plano oblíquo e o plano horizontal de projeção

Em cima traça-se uma reta perpendicular ao plano oblíquo e outra ao PHP. De seguida basta determinar o ângulo entre essas retas. Em baixo rebate-se uma reta de maior declive para o PHP. A VG do ângulo situa-se entre a reta rebatida e a sua projeção horizontal.

Ângulos entre o plano oblíquo e os planos bissetores

Sendo os bissetores planos de rampa, as retas que lhes são perpendiculares são de perfil. Aparentemente, será necessário recorrer ao plano lateral de projeção para resolver estas situações. Contudo, existe um processo muito simples e prático, que aqui se mostra.

Estes exercícios não se apresentam completos, mostrando apenas aquilo que é novidade. Para os completar rebatem-se as retas pelo processo do triângulo do rebatimento.



Ângulo entre o plano oblíquo e o $\beta_{2/4}$

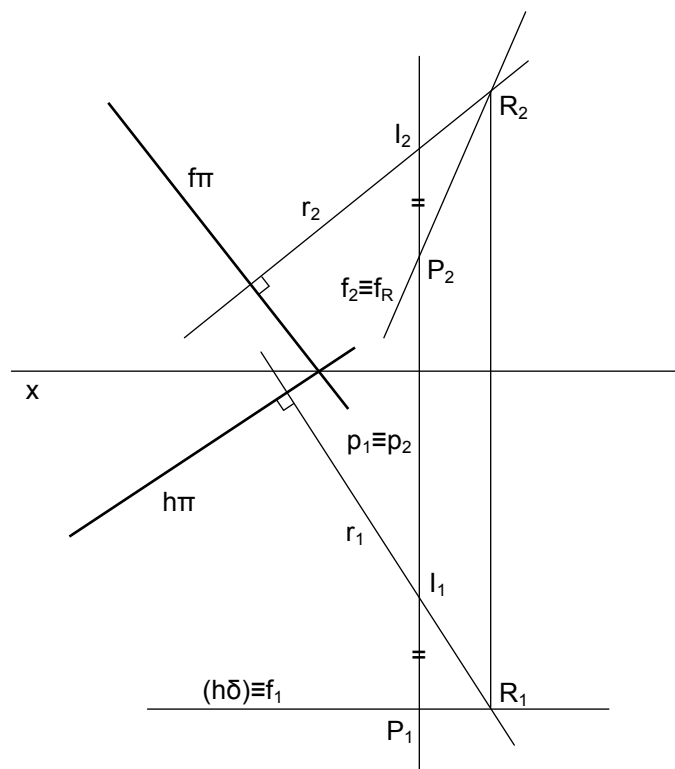
Para traçar uma reta de perfil perpendicular ao $\beta_{2/4}$ basta que a distância entre os pontos que a definem seja a mesma entre as projeções frontais e as horizontais, estando essas pela ordem que se apresenta.

Um desses pontos é I, a intersecção com a reta perpendicular ao plano oblíquo, o outro é P, por onde passa o plano sobre o qual se vai fazer o rebatimento, em torno da reta n, que é a charneira.

Ângulo entre o plano oblíquo e o $\beta_{1/3}$

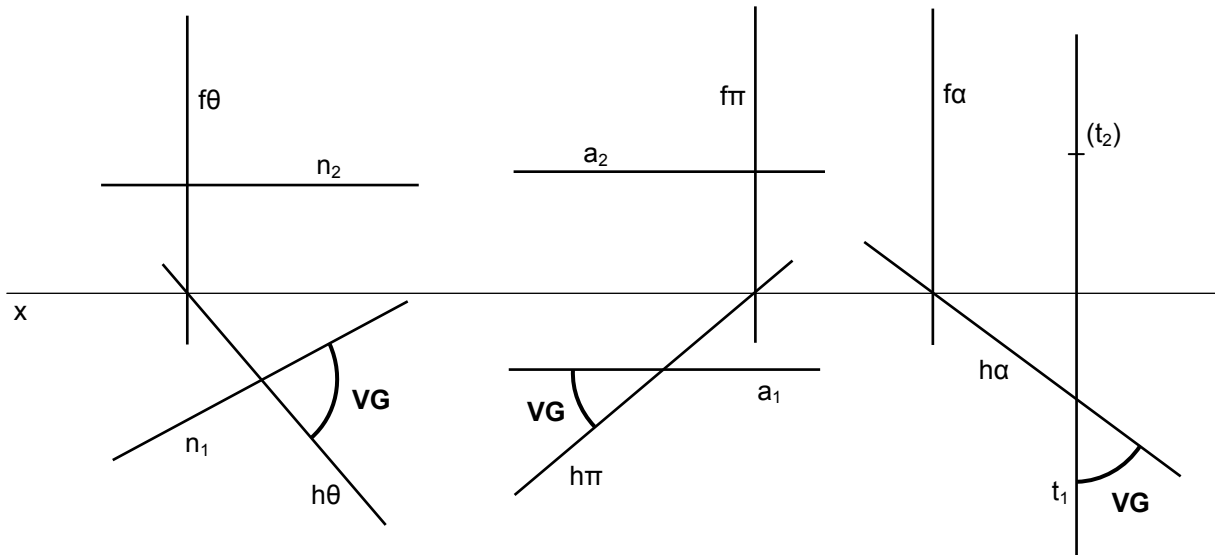
Em relação ao exercício anterior, basta mudar a posição relativa das projeções dos pontos I e P, para que a reta de perfil seja perpendicular ao $\beta_{1/3}$.

Para variar, aplica-se aqui um plano frontal a passar pelo ponto P, que origina uma charneira frontal.



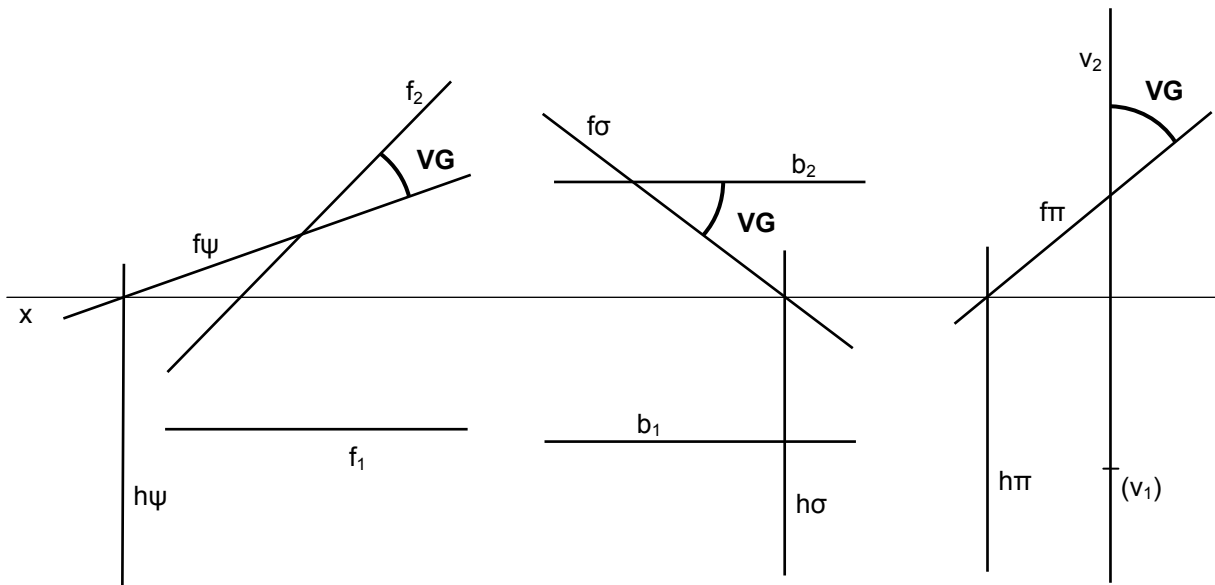
Ângulos entre retas paralelas a um plano de projeção e planos perpendiculares ao mesmo plano

A VG do ângulo entre dois planos projetantes pode determinar-se diretamente se ambos os planos forem projetantes horizontais ou projetantes verticais.



Ângulos entre retas paralelas ao plano horizontal de projeção e planos perpendiculares a esse plano

A VG do ângulo entre estes elementos determina-se diretamente entre as projeções horizontais das retas e os traços horizontais dos planos.

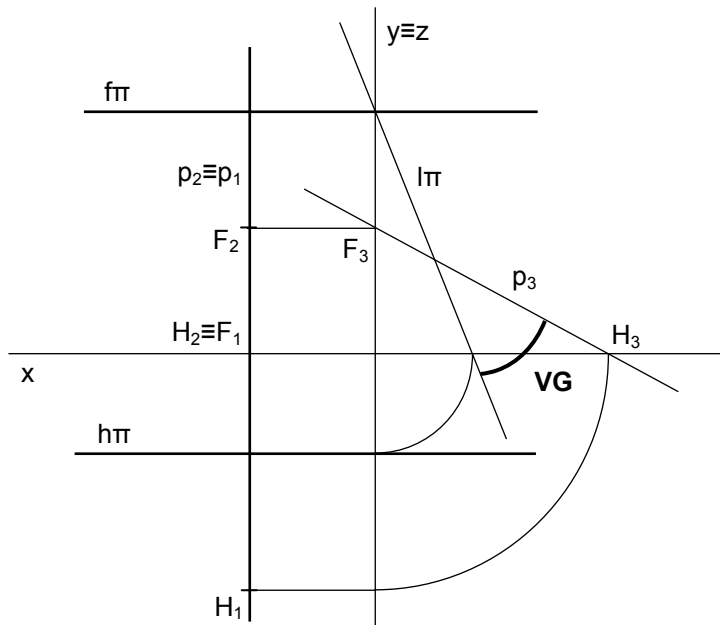


Ângulos entre retas paralelas ao plano frontal de projeção e planos perpendiculares a esse plano

A VG do ângulo entre estes elementos determina-se diretamente entre as projeções frontais das retas e os traços frontais dos planos.

Ângulos entre retas paralelas ao plano lateral de projeção e planos perpendiculares ao mesmo

As situações aqui apresentadas resolvem-se facilmente recorrendo ao plano lateral de projeção, pelo que é esse o processo utilizado.

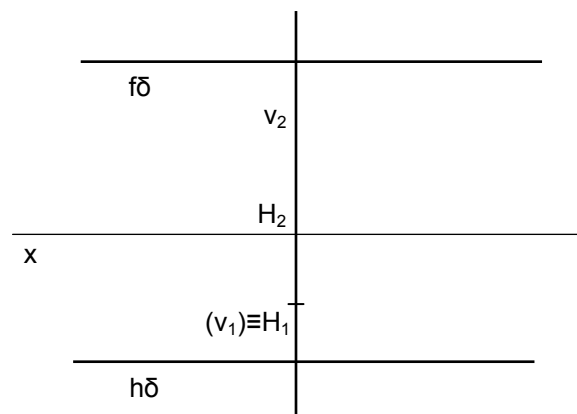
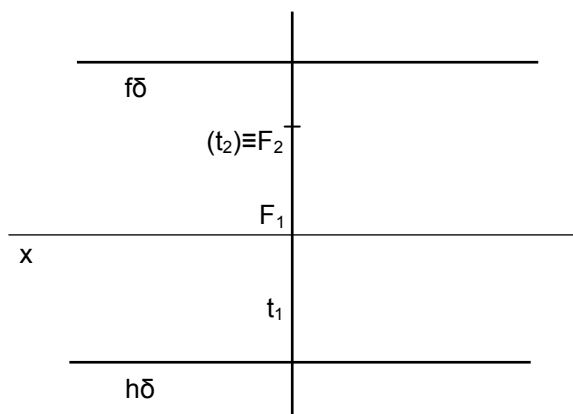
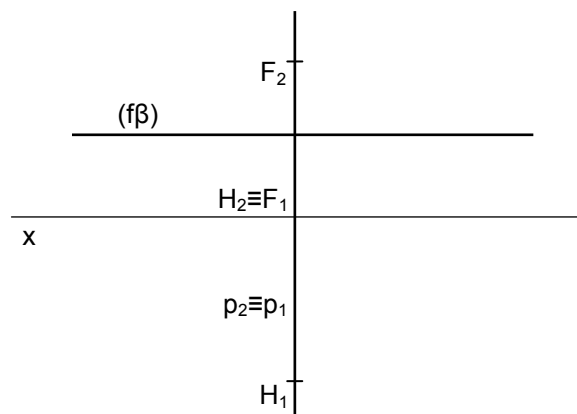
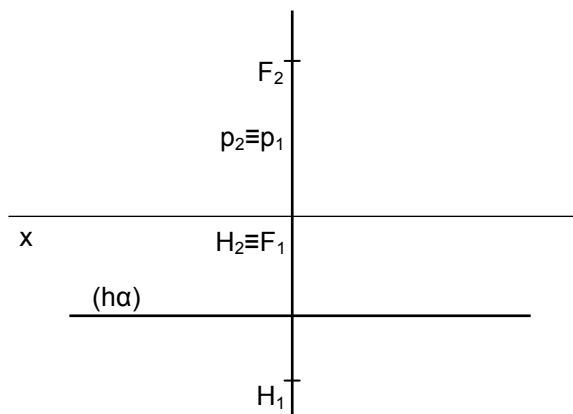


Ângulo entre a reta de perfil e o plano de rampa

Ao lado, a VG do ângulo entre estes dois elementos está indicada entre a projeção lateral da reta e o traço lateral do plano.

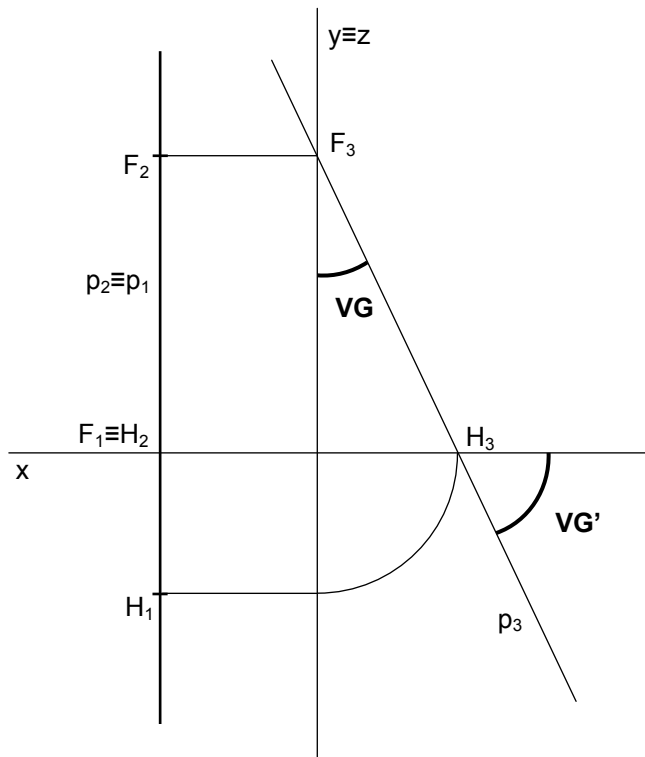
Outras situações com resolução idêntica

Em baixo estão outras situações com resolução idêntica, que envolvem as retas de perfil, de topo e vertical, com os planos frontal, horizontal e de rampa. Não se apresentam resoluções dadas as semelhanças com a situação anterior.



Ângulos entre a reta de perfil e os planos de projeção e os bissetores

Aqui determina-se o ângulo que a reta de perfil faz com cada um dos planos de projeção e cada um dos planos bissetores, recorrendo à projeção lateral da reta.

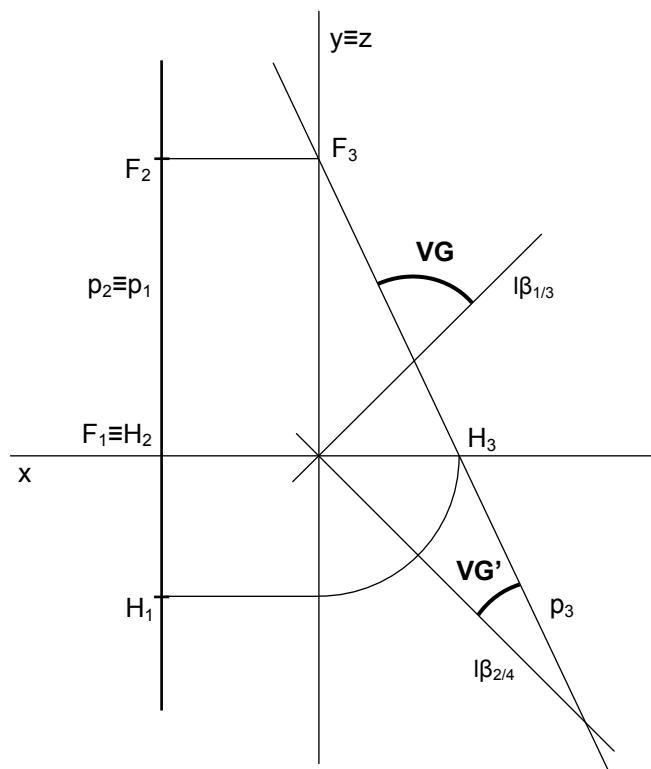


Ângulos entre a reta de perfil e os planos de projeção

Na projeção lateral, o ângulo que a reta faz com o PFP está indicado junto de F_3 , o que faz com o PHP está indicado junto de H_3 .

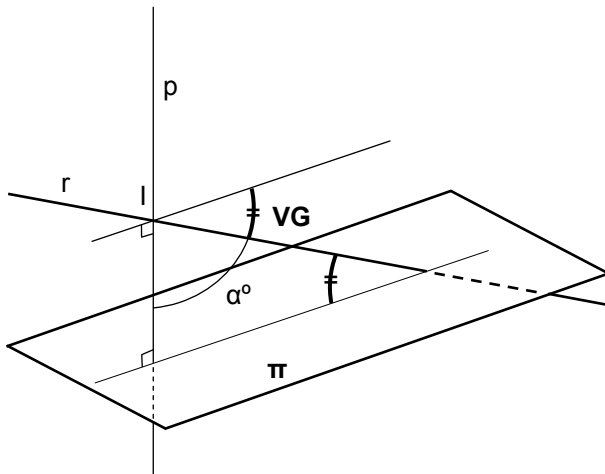
Ângulos entre a reta de perfil e os planos bissetores

Na projeção lateral, o ângulo que a reta faz com os planos bissetores está indicado junto dos traços laterais desses planos.



Ângulo entre a reta oblíqua e o plano oblíquo

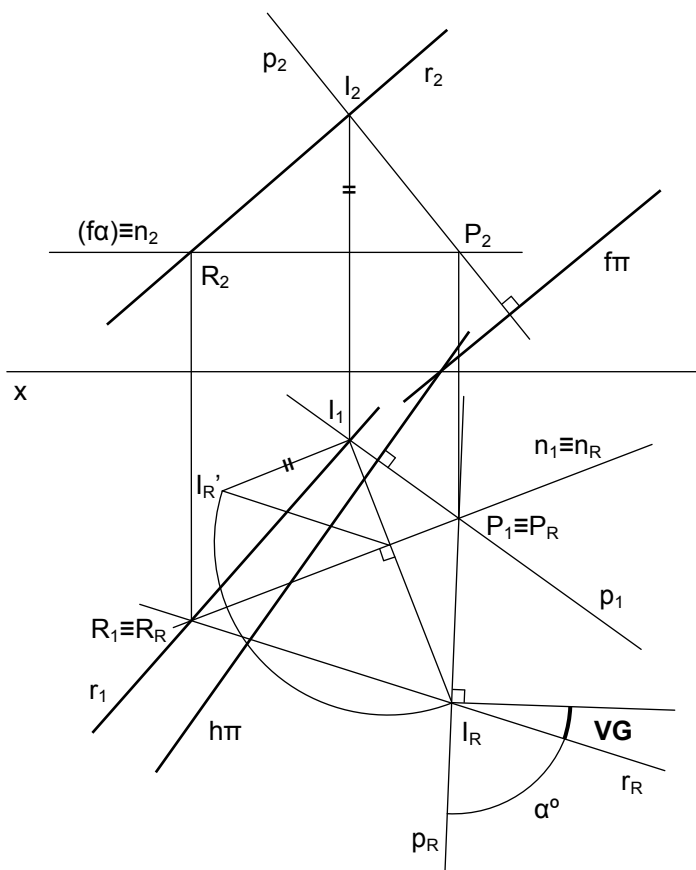
Aproveita-se esta situação para explicar o processo geral que se utiliza para determinar ângulos entre retas e planos. Este processo é idêntico ao já utilizado entre planos, onde a ideia consiste em resolver as situações com recurso a retas. É utilizado para as situações não abrangidas nas páginas anteriores.



Ângulo entre uma reta e um plano, no espaço

O ângulo entre a reta e o plano é o que se indica em baixo. Como no traçado das projeções é muito complexo ter acesso a esse ângulo, utiliza-se um processo que determina indiretamente a medida desse ângulo. Para tal utiliza-se uma reta perpendicular ao plano, concorrente com a reta dada. Acha-se o ângulo entre essas retas, α° , que é o complementar do ângulo entre a reta e o plano.

A linha traçada no plano não surge representada nas projeções.



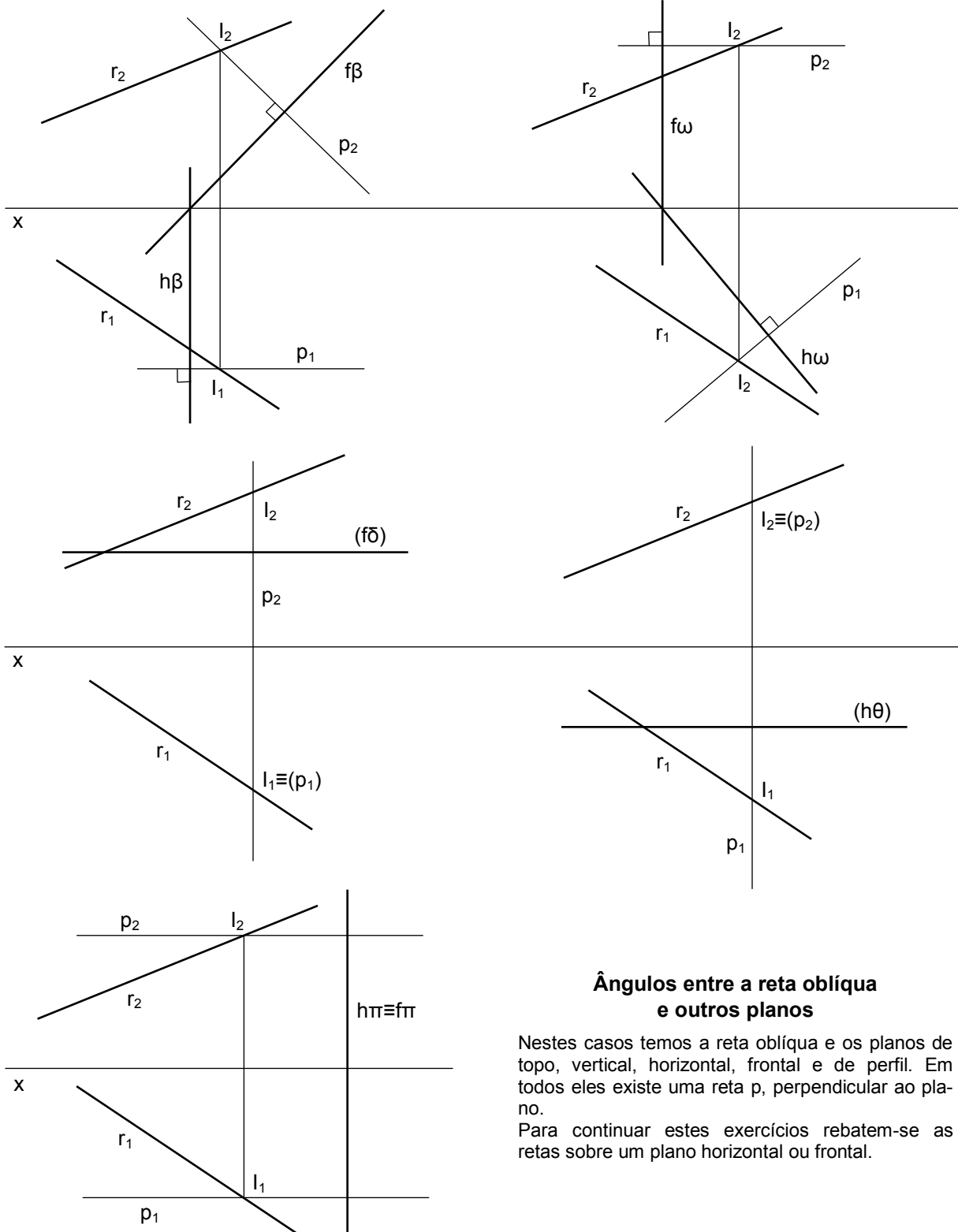
Ângulo entre uma reta e um plano, nas projeções

Para determinar a VG do ângulo entre a reta r e o plano π , procede-se da seguinte maneira:

1. Cruza-se com a reta r a reta p , perpendicular ao plano;
2. Pelo processo do triângulo do rebatimento, acha-se α° entre essas retas, em VG;
3. Traçando uma linha perpendicular a uma das retas rebatidas, a partir de I_R , obtém-se o ângulo complementar desse, cuja medida é a da VG entre a reta e o plano dados.

Outras situações que se resolvem utilizando uma reta perpendicular ao plano

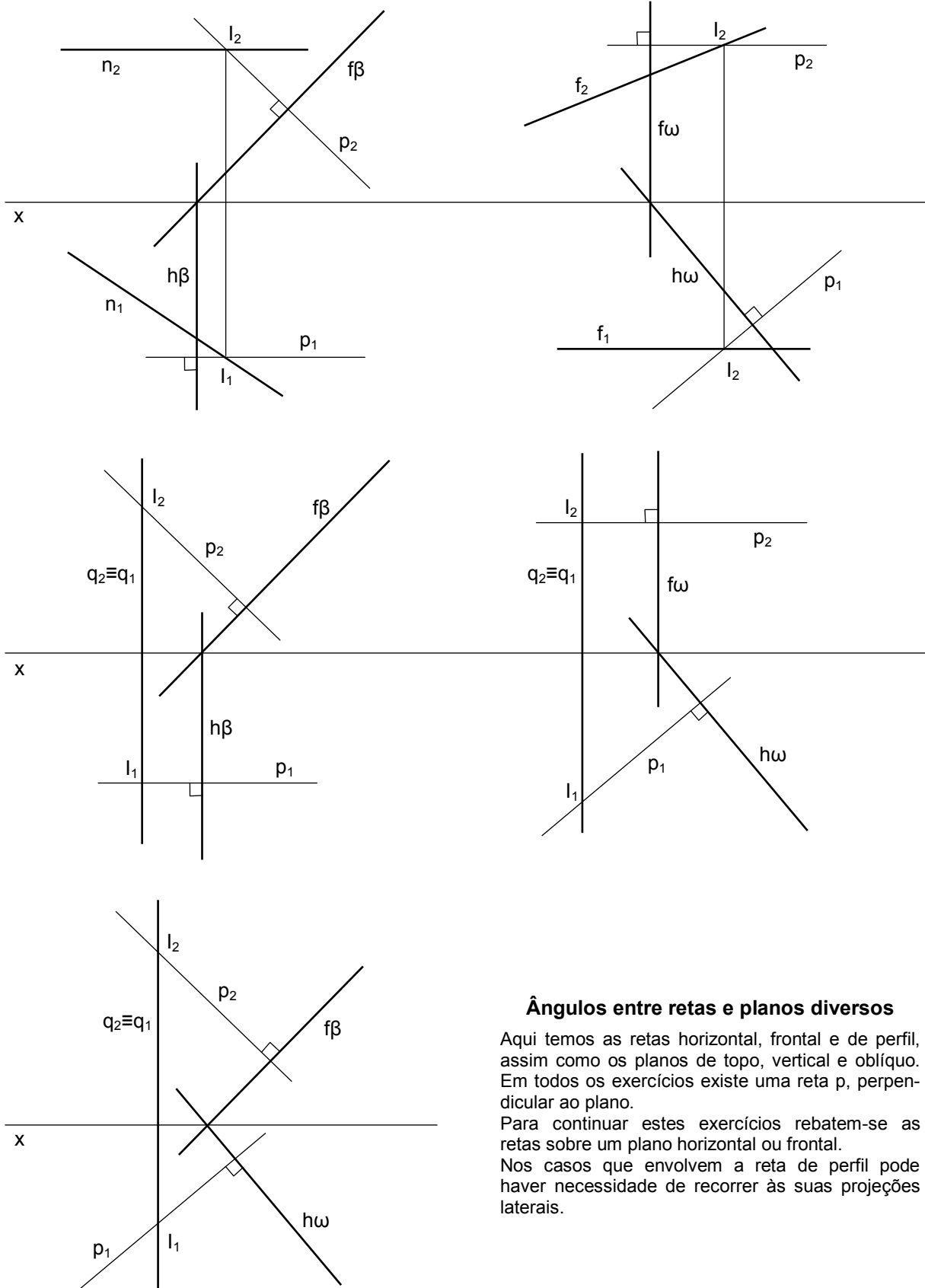
O processo utilizado na página anterior pode aplicar-se entre a reta oblíqua e todos os planos. Mostra-se aqui apenas o começo de cada exercício; a continuação consiste em achar a verdadeira grandeza do ângulo entre a reta dada e a que é perpendicular ao plano, e marcar o complementar.



Ângulos entre a reta oblíqua e outros planos

Nestes casos temos a reta oblíqua e os planos de topo, vertical, horizontal, frontal e de perfil. Em todos eles existe uma reta p , perpendicular ao plano. Para continuar estes exercícios rebatem-se as retas sobre um plano horizontal ou frontal.

Na continuação dos exemplos mostrados na página anterior, mostram-se aqui outros que se resolvem recorrendo ao mesmo processo, envolvendo planos e retas diversas.



Ângulos entre retas e planos diversos

Aqui temos as retas horizontal, frontal e de perfil, assim como os planos de topo, vertical e oblíquo. Em todos os exercícios existe uma reta p , perpendicular ao plano.

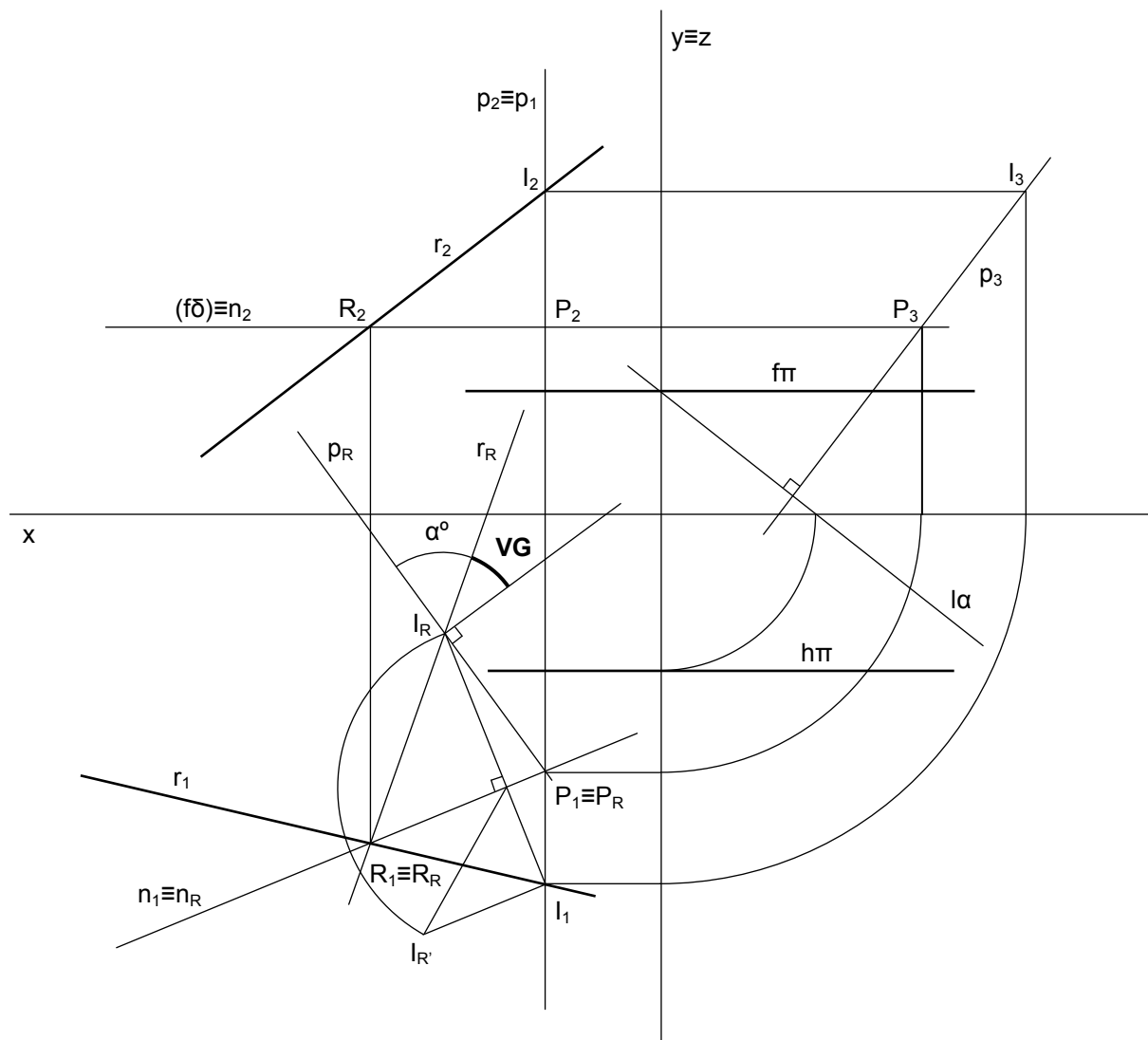
Para continuar estes exercícios rebatem-se as retas sobre um plano horizontal ou frontal.

Nos casos que envolvem a reta de perfil pode haver necessidade de recorrer às suas projeções laterais.

Ângulo entre a reta oblíqua e o plano de rampa

O processo utilizado para determinar a verdadeira grandeza do ângulo entre uma reta oblíqua e um plano oblíquo aplica-se aqui também.

Este exercício resulta idêntico ao que envolve uma reta de perfil e um plano oblíquo, pois em ambos os casos se conjugam uma reta de perfil com uma oblíqua.

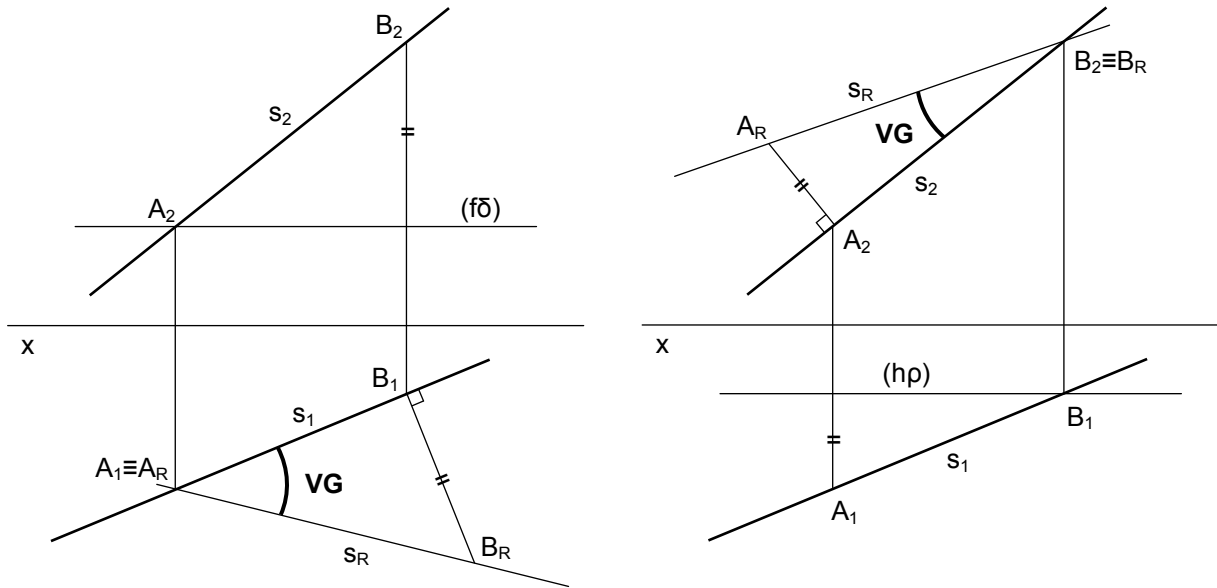


Ângulo entre a reta oblíqua e o plano de rampa

A reta p cruza a reta r no ponto I e é perpendicular ao plano π , o que se confirma na perpendicularidade entre a sua projecção lateral e o traço lateral do plano. Aqui, o rebatimento das rectas é efectuado sobre um plano horizontal. Para determinar a projecção horizontal do ponto P recorreu-se à sua projecção lateral.

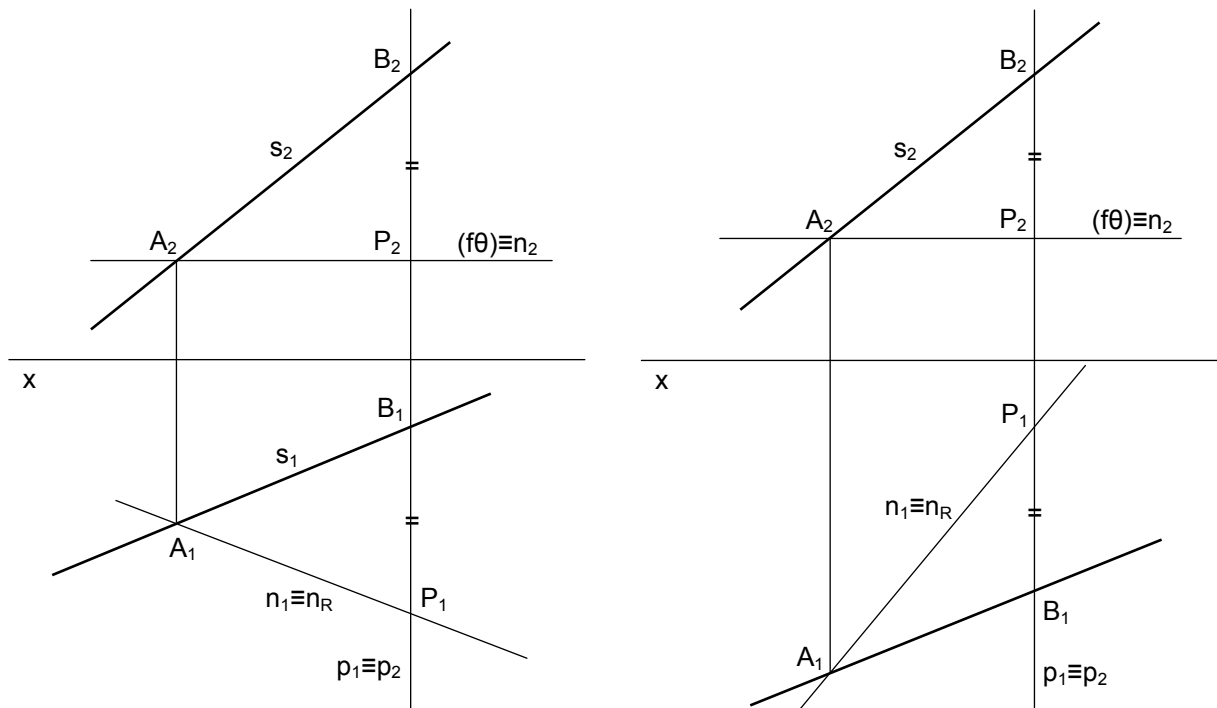
Ângulos entre a reta oblíqua e os planos de projeção e os bissetores

Mostra-se aqui estas situações segundo processos diferentes. Para que a explicação fique mais clara, em baixo não se apresenta o traçado completo, faltando rebater as retas.



Ângulos entre a reta oblíqua e os planos de projeção

Utiliza-se aqui o rebatimento simplificado para determinar estes ângulos. À esquerda rebate-se a reta sobre um plano horizontal; à direita rebate-se sobre um plano frontal. A VG encontra-se entre a reta rebatida e a sua projeção no plano sobre o qual ela rebateu. À esquerda temos a VG com o PHP, à direita com o PFP.

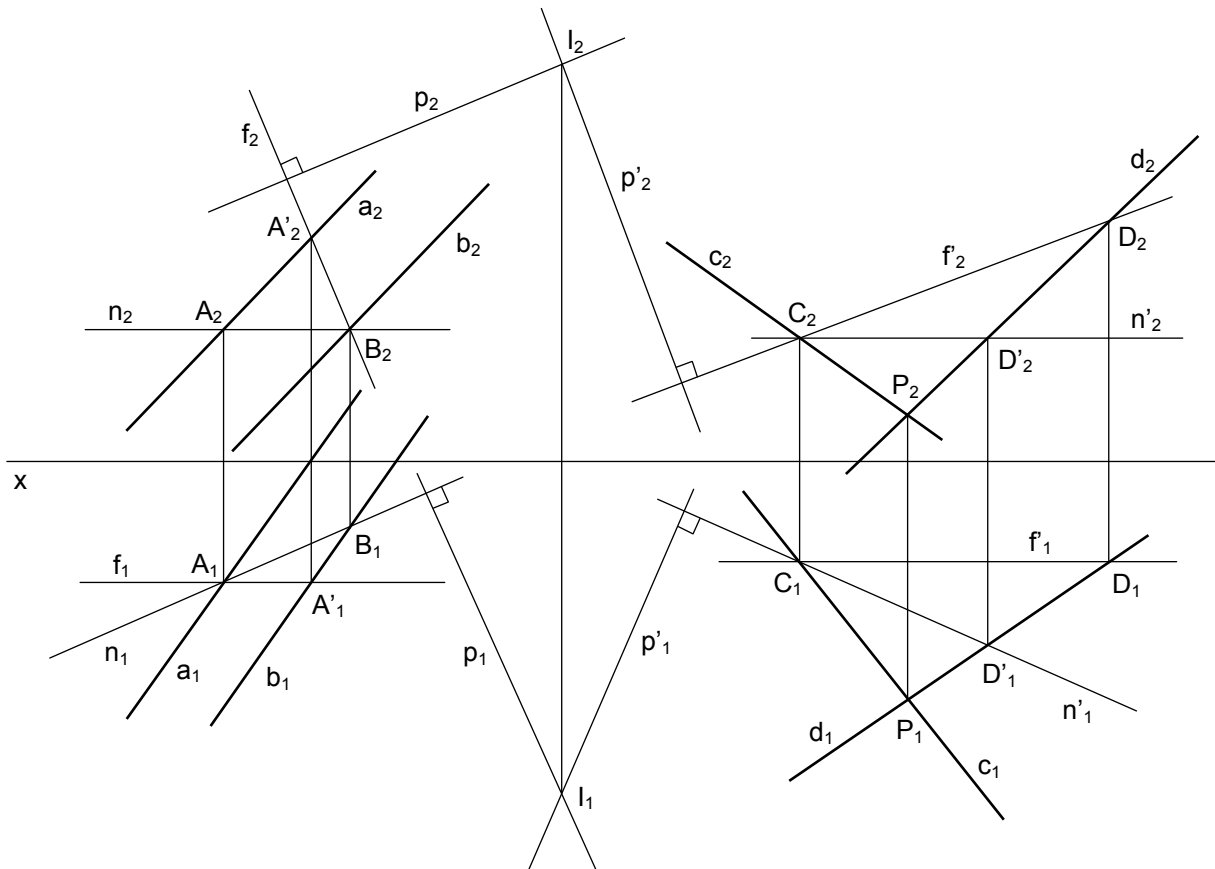


Ângulos entre a reta oblíqua e os planos bissetores

Para determinar estes ângulos utilizam-se retas perpendiculares aos bissetores, que são de perfil. Para que uma reta seja perpendicular a um bissetor basta ter dois pontos cuja sequência das projeções se apresente como aqui se mostra. À esquerda a reta de perfil da esquerda é perpendicular ao $\beta_{1/3}$, a da direita é perpendicular ao $\beta_{2/4}$. Para concluir estes exercícios basta rebater as retas e indicar como VG o ângulo complementar delas.

Ângulo entre planos definidos por retas

Se os planos estiverem definidos por retas há que traçar retas paralelas aos seus traços, para se poder traçar retas perpendiculares aos planos. Se um dos planos definido por retas for de rampa, haverá necessidade de recorrer às projeções laterais. Essa situação não se mostra aqui, mas fica-se com uma ideia daquilo que é necessário fazer nesse caso observando o segundo exercício da página seguinte.

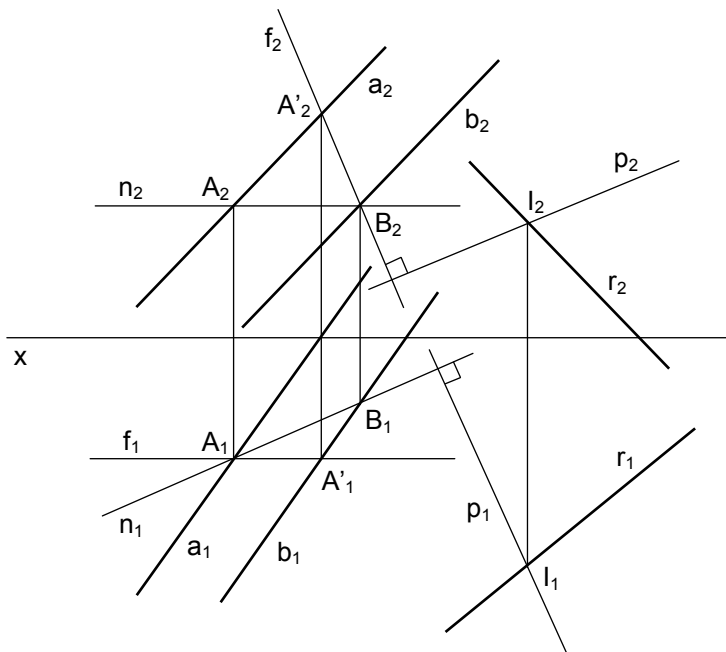


Ângulos entre planos definidos por retas

À esquerda, as retas paralelas a e b definem um plano; à direita, as retas concorrentes c e d definem outro. As retas horizontais e frontais traçadas num e noutro dão a direção dos traços desses planos. A reta p é perpendicular a um plano, a reta p' é perpendicular ao outro. Para concluir o exercício basta rebater essas retas e indicar a VG do ângulo entre elas.

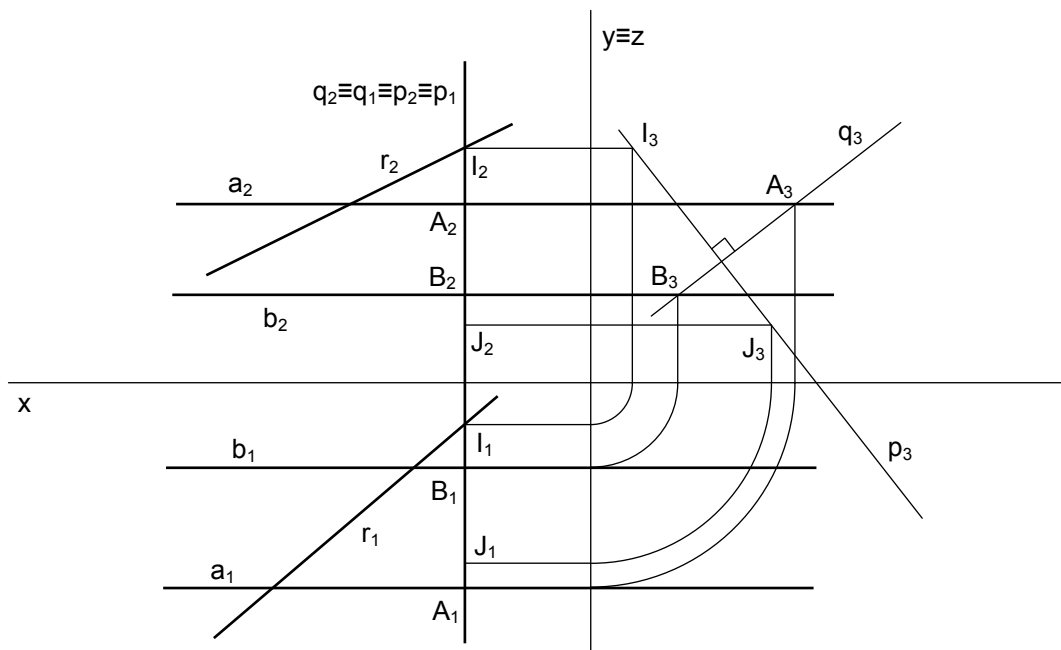
Ângulos entre uma reta e planos definidos por retas

Mostra-se aqui como se procede para determinar o ângulo entre uma reta oblíqua e um plano definido por duas retas paralelas. Se a reta for de perfil ou o plano for de rampa (como se mostra na segunda situação) será necessário recorrer à projeção lateral, por exemplo. Os exercícios não se apresentam completos para não sobrecarregar os traçados.



Ângulo entre a reta oblíqua e um plano oblíquo definido por retas

Para traçar uma reta perpendicular a um plano definido por retas (sejam paralelas ou oblíquas) representa-se uma reta horizontal e outra frontal desse plano. A reta perpendicular ao plano será perpendicular a essas retas. Para terminar o exercício basta rebater as retas r e p e indicar como VG o complementar do ângulo entre elas.



Ângulo entre uma reta oblíqua e um plano de rampa definido por duas retas

Um plano definido por duas retas fronto-horizontais é um plano de rampa; uma reta perpendicular a esse plano é de perfil. Para a determinar utiliza-se aqui a reta de perfil q, do plano. A reta pretendida, p, terá que ser perpendicular a essa, o que se confirma na projeção lateral. Também aqui, para terminar o exercício basta rebater as retas r e p e indicar como VG o complementar do seu ângulo.

Ângulos – Exercícios

Ângulos entre retas paralelas ao mesmo plano de projeção

- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - n, horizontal, com traço em $F(1;0;4)$, fazendo 35° ad;
 - m, horizontal, com traço em $F'(4;0;-2)$, fazendo 70° ad.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - f, frontal, com traço em $H(3;0;0)$, fazendo 50° ad;
 - g, frontal, com traço em $H'(-1;-4;0)$, fazendo 30° ae.Indicar também o ponto de cada reta que fica mais próximo da outra.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - h, fronto-horizontal do $\beta_{1/3}$, com $-2,5$ cm de afastamento;
 - n, horizontal, que contém $P(-4;-6;4)$, fazendo 50° ad.Indicar também o ponto de cada reta que fica mais próximo da outra.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - t, de topo, com 2cm de abscissa e 3cm de cota;
 - f, frontal, que contém $R(1;4;2)$ e faz 25° ad.Indicar também o ponto de cada reta que fica mais próximo da outra.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - p, de perfil, definida por $H(4;3;0)$ e $F(4;0;-6)$;
 - q, de perfil, definida por $A(4;6;1)$ e $B(4;-1;7)$.Determinar também o ponto I, intersecção entre as retas.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - p, do exercício anterior;
 - b, de perfil, que contém $K(7;-1,5;3)$ e é passante.Determinar também o ponto de cada reta que fica mais próximo da outra.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - q, do exercício 5;
 - v, vertical, com 3cm de afastamento e 4cm de abscissa.Determinar também o ponto I, intersecção entre as retas.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - b, do exercício 6;
 - t, de topo, com -4 cm de cota e 3cm de abscissa.Determinar também o ponto I, intersecção entre as retas.

Situações diversas de ângulos entre retas

- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - r, que contém $H(5;7;0)$ e $P(-2;-1;5)$;
 - s, que contém P e é paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projeção frontal 50° ae.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - r, do exercício anterior;
 - n, horizontal, concorrente com r no seu ponto com 2cm de cota, fazendo 25° ad.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - s, do exercício 9;
 - a, concorrente com s no seu traço horizontal, sendo paralela ao $\beta_{1/3}$ e fazendo a sua projeção frontal 30° ae.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - a, do exercício anterior;
 - h, fronto-horizontal, concorrente com a no seu ponto com 1cm de cota.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - b, que contém $B(1;4;6)$ e é passante num ponto com 5cm de abscissa.
 - t, de topo, concorrente com b em B.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - b, do exercício anterior;
 - v, vertical, concorrente com b em B.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - b, do exercício 13;
 - c, passante num ponto com -2 cm de abscissa e concorrente com b em B.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - n, horizontal, que contém $S(2;3;1)$ e faz 45° ae;
 - f, frontal, que contém S e faz 30° ae.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - r, que contém $A(2;2;1)$ e $B(6;4;4)$;
 - p, de perfil, que contém A e $C(2;6;3)$.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - r, do exercício anterior;
 - q, de perfil, que contém A e é paralela ao $\beta_{1/3}$.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - s, que contém $C(2;2;2)$ e $D(6;6;5)$;
 - m, que contém $K(-2;4;6)$ e $L(-4;7;8)$.
- Determinar a VG do ângulo entre as retas:
 - s, do exercício anterior;
 - n, horizontal, com traço em $F(-3;0;2)$, fazendo 70° ae.

Ângulos entre planos perpendiculares ao mesmo plano de projeção

21. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - α , vertical, que cruza o eixo x no ponto de abscissa nula e faz 50° ae;
 - β , vertical, que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abscissa e faz 20° ae.
22. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - θ , de topo, que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abscissa e faz 55° ad;
 - π , de perfil, com abscissa nula.
23. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - θ , do exercício anterior;
 - δ , horizontal com -2,5cm de cota.
24. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - ρ , cujos traços têm 2cm de cota e 4cm de afastamento;
 - ψ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço frontal tem 5cm de cota.
25. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - ω , cujos traços têm -3cm de cota e 4cm de afastamento;
 - φ , frontal, com 2cm de afastamento.
26. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - π , passante, que contém o ponto P(3;3;2);
 - v, horizontal, com -3cm de cota.

Situações diversas de ângulos entre planos

27. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - σ , que cruza o eixo x num ponto com -1cm de abscissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 50° ae e 35° ae, respetivamente.
 - θ , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 40° ad e 60° ad, respetivamente.
28. Determinar a VG dos ângulos entre os planos:
 - σ , do exercício anterior;
 - PFP e PHP.
29. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - α , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abscissa, fazendo o seu traço frontal 60° ad;
 - δ , vertical, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa, fazendo 25° ae.
30. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - α , do exercício anterior;
 - $\beta_{1/3}$;
31. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - δ , do exercício 29;
 - ρ , de topo, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa e faz 50° ad.
32. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - ρ , do exercício anterior;
 - $\beta_{2/4}$.

33. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - ψ , que cruza o eixo x num ponto com 6cm de abscissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 65° ae e 25° ad, respetivamente;
 - ω , de perfil, com 1cm de abscissa.
34. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - ψ , do exercício anterior;
 - π , cujos traços têm 3cm de cota e 2cm de afastamento.
35. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - ψ , do exercício 33;
 - $\beta_{2/4}$.
36. Determinar a VG do ângulo entre os planos:
 - θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com -4cm de abscissa, fazendo o seu traço horizontal 50° ad;
 - δ , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 35° ad e 50° ad, respetivamente.

Ângulos entre retas paralelas e planos perpendiculares ao mesmo plano de projeção

37. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:
 - n, horizontal, que tem traço em F(-2;0;-2) e faz 65° ae;
 - σ , vertical, que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abscissa e faz 30° ae.
38. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:
 - a, fronto-horizontal, que tem -4cm de cota e 3cm de afastamento;
 - α , de topo, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa, fazendo 35° ad.
39. Determinar a VG do ângulo entre a reta e os planos:
 - p, de perfil, cujos traços são H(6;-3;0) e F(6;0;5);
 - PHP e PFP.
40. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:
 - p, do exercício anterior;
 - ρ , cujos traços têm 2cm de cota e -6cm de afastamento.
41. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:
 - v, vertical, com 3cm de abscissa e 3cm de afastamento;
 - ω , passante, que contém o ponto T(4;-3;2).
42. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:
 - t, de topo, com 4cm de abscissa e -4cm de afastamento;
 - ω , do exercício anterior.

Ângulos entre retas paralelas e planos perpendiculares ao mesmo plano de projeção (Continuação)

43. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- q, de perfil, que contém os pontos A(3;-4;1) e B(3;1,5;5);
- v, horizontal, com -2cm de cota.

44. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- q, do exercício anterior;
- φ, frontal, com -4cm de afastamento.

Situações diversas de ângulos entre retas e planos

45. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- r, que contém P(2;6;4), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 30°ad e 40°ad, respetivamente;
- π, que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, sendo os seus traços paralelos às projeções homónimas de r.

46. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- r, do exercício anterior;
- ψ, vertical, que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa e faz 65°ae.

47. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- r, do exercício 45;
- θ, cujos traços têm 4cm de afastamento e 3cm de cota.

48. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- r, do exercício 45;
- PHP.

49. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- s, cujo traço frontal é F(6;0;7) fazendo as suas projeções frontal e horizontal 35°ae e 60°ad, respetivamente.
- β, que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 65°ae e 25°ad, respetivamente.

50. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- s, do exercício anterior;
- PFP.

51. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- s, do exercício 49;
- β_{1/3}.

52. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- t, de topo, que contém o ponto T(1;4;4);
- β, do exercício 49.

53. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- n, horizontal, que contém N(4;1;4), fazendo 45°ae;
- δ, cujos traços têm 4cm de afastamento e 2,5cm de cota.

54. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- p, cujos traços são H(3;-4;0) e F(3;0;2,5);
- σ, que cruza o eixo x num ponto com -4cm de abcissa, cujos traços frontal e horizontal fazem 25°ae e 60°ae, respetivamente.

Situações que envolvem planos definidos por retas ou por pontos

55. Determinar a VG do ângulo entre os planos:

- ρ, definido pelas retas paralelas a e b, que contém A(2;3;4) e B(2;6;1), fazendo as suas projeções frontais e horizontais 45°ae e 30°ad, respetivamente.
- ω, de topo, que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa, fazendo 40°ad.

56. Determinar a VG do ângulo entre os planos:

- ρ, do exercício anterior;
- π, definido por i_m, que contém P(-6;5;1), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 35°ae e 45°ad, respetivamente.

57. Determinar a VG do ângulo entre os planos:

- ρ, do exercício 55;
- PHP e PFP.

58. Determinar a VG do ângulo entre os planos:

- ψ, definido por A(6;5;1), B(2;1;4) e C(0;3;0);
- θ, de perfil, com -4cm de abcissa.

59. Determinar a VG do ângulo entre os planos:

- ψ, do exercício anterior;
- β_{2/4}.

60. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- n, horizontal, cujo traço é F(2;0;5), fazendo 65°ae;
- α, definido por d_α, que contém H(0;5;0) e é paralela ao β_{2/4}, fazendo a sua projecção frontal 50°ad.

61. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- v, vertical, com traço em H(2;5;0);
- α, do exercício anterior.

62. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- ρ, do exercício 55;
- h, fronto-horizontal, com 3cm de cota e 4cm de afastamento.

63. Determinar a VG do ângulo entre a reta e o plano:

- ψ, do exercício 58;
- p, de perfil passante, contendo P(1;3;6).