

11

DISTÂNCIAS

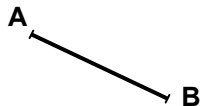
Neste capítulo estuda-se uma das partes dos Problemas Métricos (a outra é o capítulo Ângulos). Apresentam-se as várias possibilidades de conjugar pontos, retas e planos e mostra-se como se determina a distância entre essas figuras. Para o estudo deste capítulo convém ter um bom conhecimento dos Métodos Geométricos Auxiliares.

Sumário:

- 2 e 3. As distâncias no espaço
- 4. Distâncias entre pontos com uma coordenada igual
- 5. Distâncias entre pontos sem coordenadas iguais
- 6. Distância entre um ponto e um plano projetante
- 7 e 8. Distância entre um ponto e plano de rampa
- 9 e 10. Distância entre um ponto e um plano oblíquo
- 11. Distâncias entre planos projetantes
- 12 e 13. Distância entre planos de rampa
- 14 e 15. Distância entre planos oblíquos
- 16. Distância entre uma reta e um plano projetante
- 17. Distância entre uma reta e um plano de rampa
- 18. Distância entre uma reta e um plano oblíquo
- 19. Distâncias de resolução direta entre um plano e uma reta
- 20. Distâncias entre um ponto e as retas horizontal, frontal e fronto-horizontal
- 21. Distância entre um ponto e uma reta de perfil
- 22. Distância entre um ponto e uma reta oblíqua
- 23. Distâncias de resolução direta entre retas paralelas
- 24. Distâncias entre retas fronto-horizontais, oblíquas, horizontais e frontais paralelas
- 25. Distância entre retas de perfil paralelas
- 26. Distâncias de resolução direta entre retas enviesadas
- 27 e 28. Distância entre retas oblíquas enviesadas
- 29. Distância entre um ponto e um plano definido por retas
- 30. Distância entre uma reta e um plano definido por retas
- 31. Distância entre planos definidos por retas
- 32, 33 e 34. Exercícios

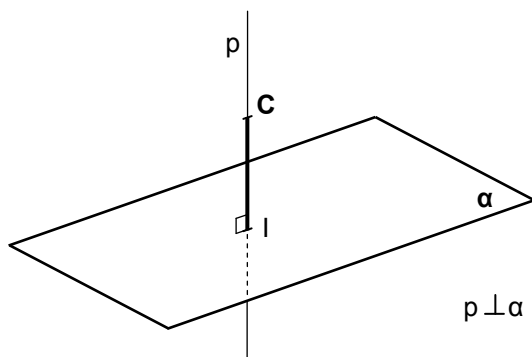
As distâncias no espaço

Neste capítulo estudam-se distâncias entre: dois pontos; um ponto e um plano; dois planos; um ponto e uma reta; duas retas; uma reta e um plano.



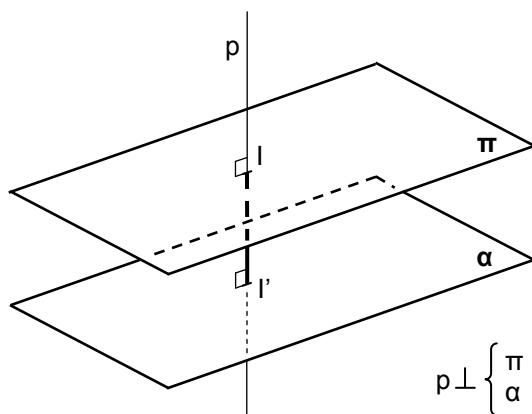
Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos corresponde ao tamanho do segmento de reta que tem esses pontos como extremos.



Distância entre um ponto e um plano

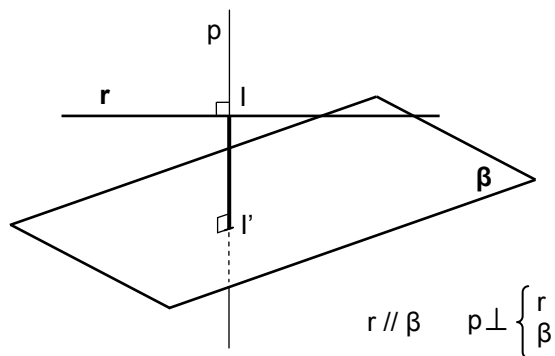
A distância entre um ponto e um plano é a medida do segmento de reta que tem como extremos esse ponto e o ponto do plano que lhe fica mais próximo. Este obtém-se passando pelo ponto dado uma reta perpendicular ao plano, que o vai intersectar.



Distância entre dois planos

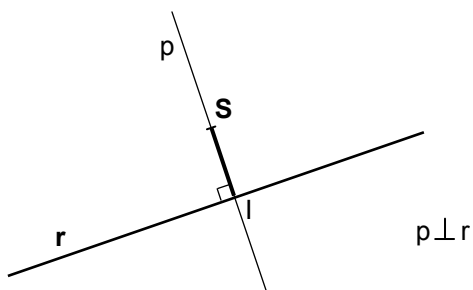
A distância entre dois planos é a medida de um segmento de reta cujos extremos são os pontos de intersecção de uma reta com os planos, sendo essa reta perpendicular aos planos.

Nas projeções veremos que as distâncias nem sempre se determinam da forma direta e simples que estes esquemas aparentam, sendo muitas vezes necessário aplicar métodos auxiliares.



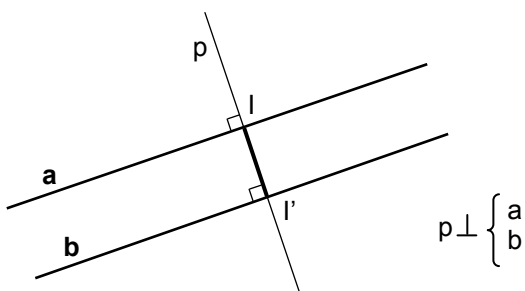
Distância entre uma reta e um plano

A distância entre uma reta e um plano é a medida dum segmento de reta perpendicular a ambas as figuras, cujos extremos se situam em cada uma delas. Esse segmento obtém-se intersectando uma reta perpendicular a ambos os elementos.



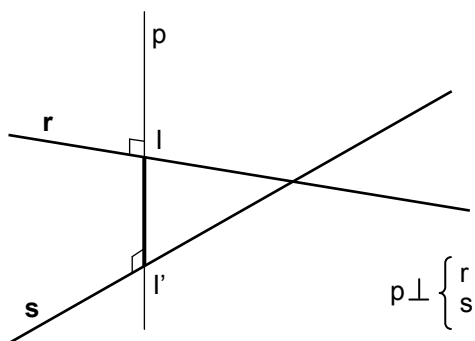
Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre estes elementos é a medida do segmento de reta perpendicular à reta, tendo como extremos o ponto dado e o ponto da reta que lhe fica mais próximo. Esse segmento pode obter-se passando pelo ponto dado uma reta perpendicular e concorrente com a dada.



Distância entre duas retas paralelas

A distância entre duas retas paralelas é a medida de um segmento de reta perpendicular a ambas, com um extremo em cada uma das retas. Esse segmento pode obter-se cruzando pelas retas dadas uma reta perpendicular e concorrente com ambas.



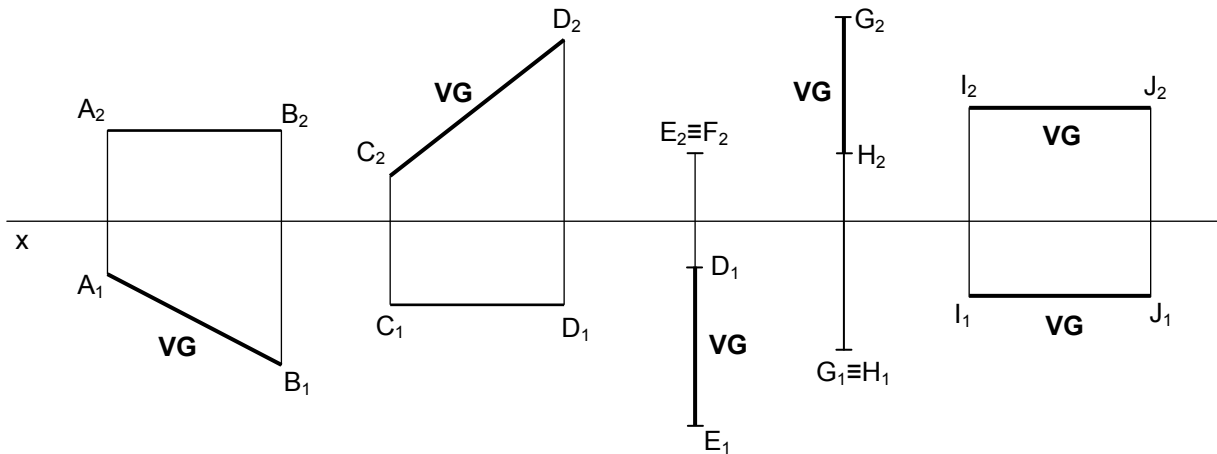
Distância entre duas retas enviesadas

A distância entre duas retas enviesadas obtém-se aqui através de uma reta perpendicular e concorrente com ambas. Dos pontos de intersecção resulta o segmento mais curto entre estas retas.

Distâncias entre pontos com uma coordenada igual

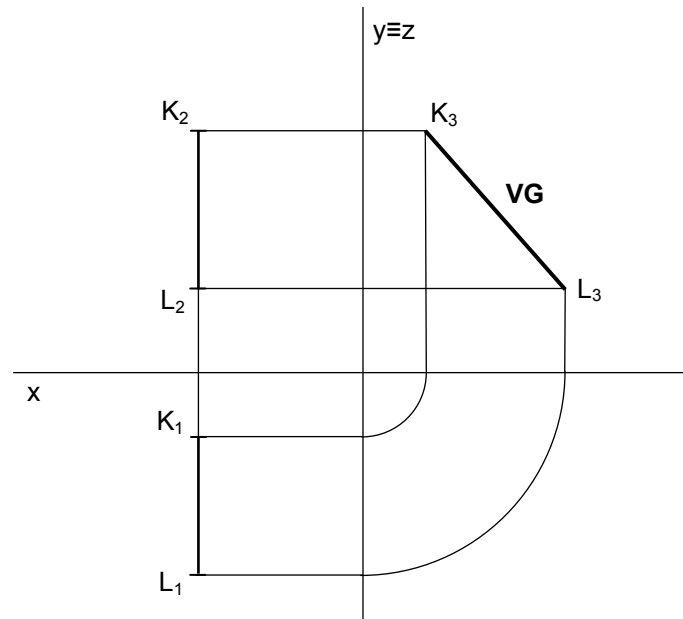
Nesta página mostra-se como se determina a verdadeira grandeza (VG) da distância entre dois pontos que têm em comum a medida de, pelo menos, uma das coordenadas.

Para mais fácil visualização, aqui optou-se por unir os pontos, transformando-os num segmento de reta.



Verdadeira grandeza de segmentos de reta paralelos aos planos de projeção

Nos segmentos paralelos aos planos de projeção, a VG determina-se diretamente. Um segmento que se projeta num plano ao qual é paralelo mantém o seu tamanho real nessa projeção. O segmento fronto-horizontal, mantém a VG em ambas as projeções, já que é paralelo a ambos os planos de projeção; neste caso basta indicar a VG apenas numa delas.



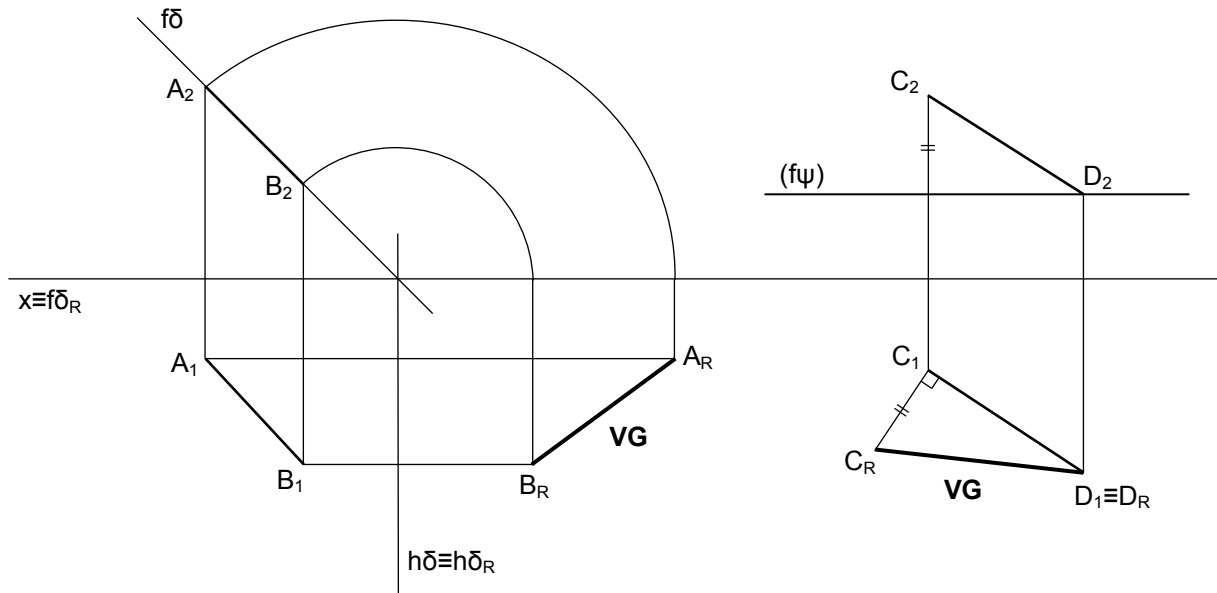
Verdadeira grandeza de um segmento de reta de perfil

O segmento de reta de perfil é paralelo ao plano lateral de projeção, por isso a sua projeção nesse plano apresenta-se em VG.

Este exercício pode também ser resolvido por qualquer dos processos que se mostram na página seguinte, aplicados ao segmento de reta oblíquo.

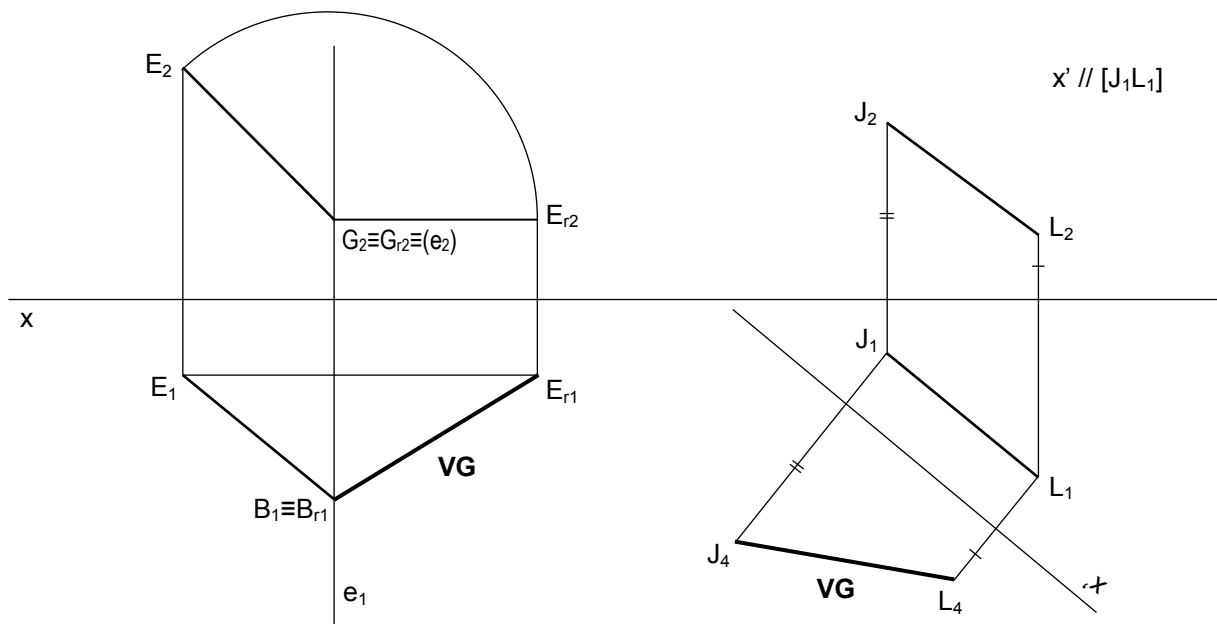
Distâncias entre pontos sem coordenadas iguais

Quando nenhuma das coordenadas dos pontos tem valor igual, estamos perante um segmento de reta oblíquo. Para determinar a sua verdadeira grandeza utilizam-se processos geométricos auxiliares: rebatimentos, rotações ou mudanças de planos. Estes processos também se podem aplicar ao segmento de reta de perfil.



Verdadeira grandeza de um segmento de reta oblíquo, utilizando rebatimentos

São mostradas aqui duas maneiras de rebater o segmento de reta. No primeiro caso rebateu-se para o PHP o plano de topo que contém o segmento; no segundo fez-se um rebatimento lateral, simplificado, para o plano horizontal que contém um dos pontos, sem indicação do plano que rebate nem de charneira.

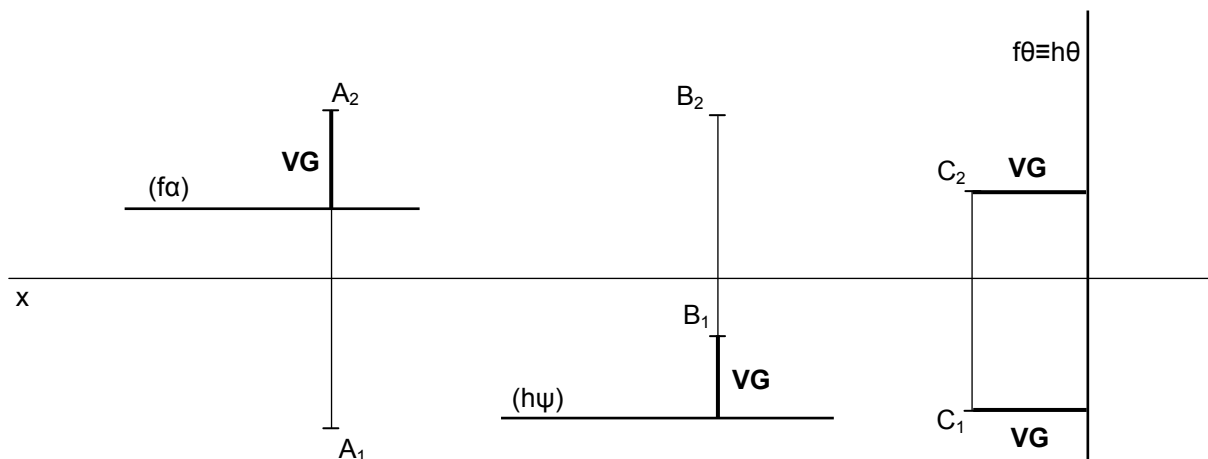


Verdadeira grandeza de um segmento de reta oblíquo, com rotações e mudanças de planos

No primeiro caso aplicou-se uma rotação, colocando o segmento horizontal com um eixo de topo. No segundo caso fez-se um mudança do PFP tornando o segmento de reta frontal.

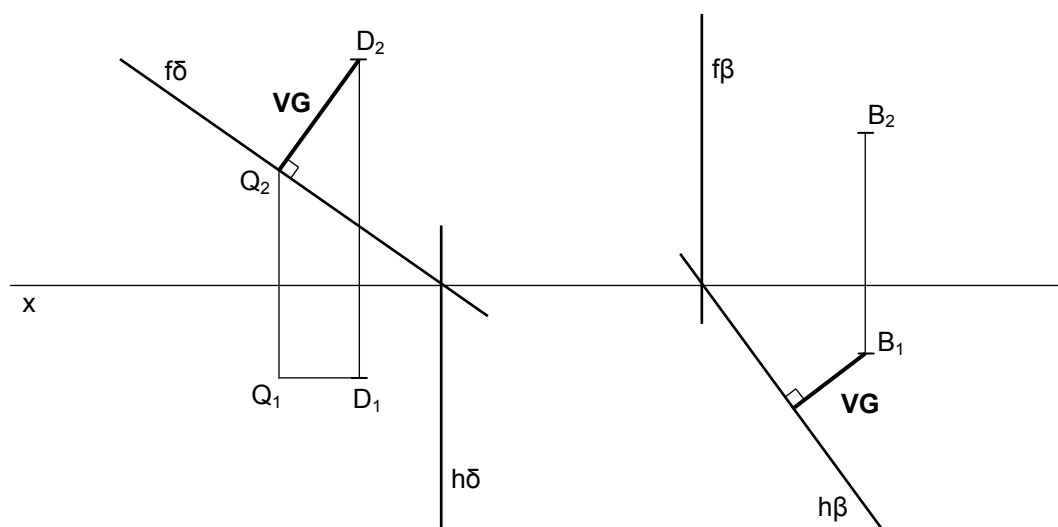
Distância entre um ponto e um plano projetante

A verdadeira grandeza da distância entre um ponto e um plano determina-se diretamente sempre que o plano é projetante, bastando traçar um segmento de reta na perpendicular ao traço do plano sobre o qual ele é projetante.



Distância entre um ponto e os planos horizontal, frontal e de perfil

Se o plano for projetante frontal a VG da distância encontra-se entre o seu traço frontal e a projeção frontal do ponto; se o plano for projetante horizontal encontra-se entre o traço horizontal e a projeção horizontal do ponto; no caso do plano de perfil, que é duplamente projetante, pode marcar-se a partir de qualquer uma das projeções do ponto, uma vez que as distâncias aos traços do plano são iguais.

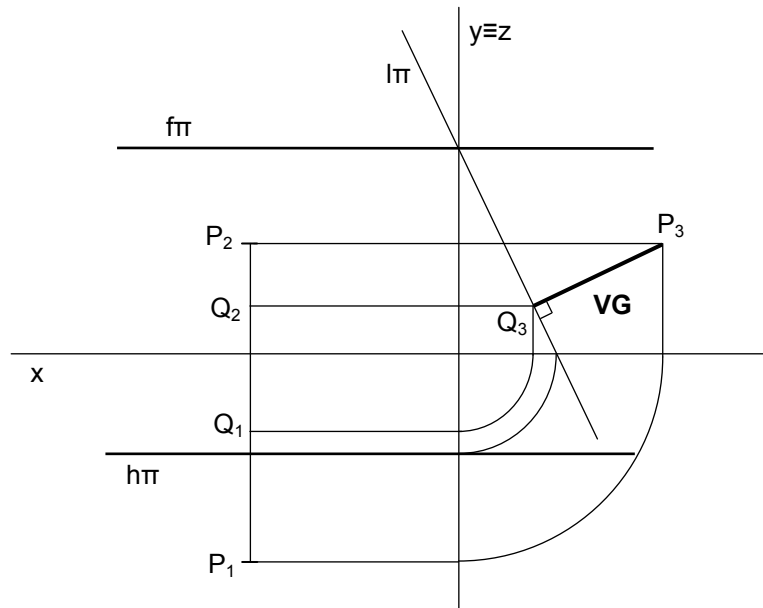


Distância entre um ponto e os planos de topo e vertical

No plano de topo (que é projetante frontal) a VG da distância marca-se na perpendicular entre a projeção frontal do ponto e o traço frontal do plano; no plano vertical (projetante horizontal) a VG marca-se entre a projeção horizontal do ponto e o traço horizontal do plano. No primeiro caso indica-se também o ponto do plano que fica mais próximo do ponto dado.

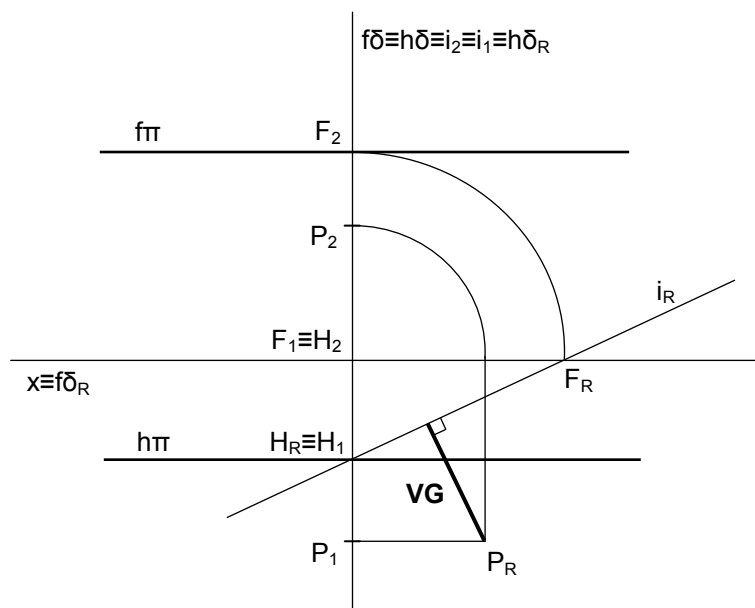
Distância entre um ponto e um plano de rampa

Mostra-se aqui como se pode determinar a VG da distância entre um ponto e um plano de rampa utilizando o plano lateral de projeção e o rebatimento.



Distância entre um ponto e um plano de rampa, utilizando o plano lateral de projeção

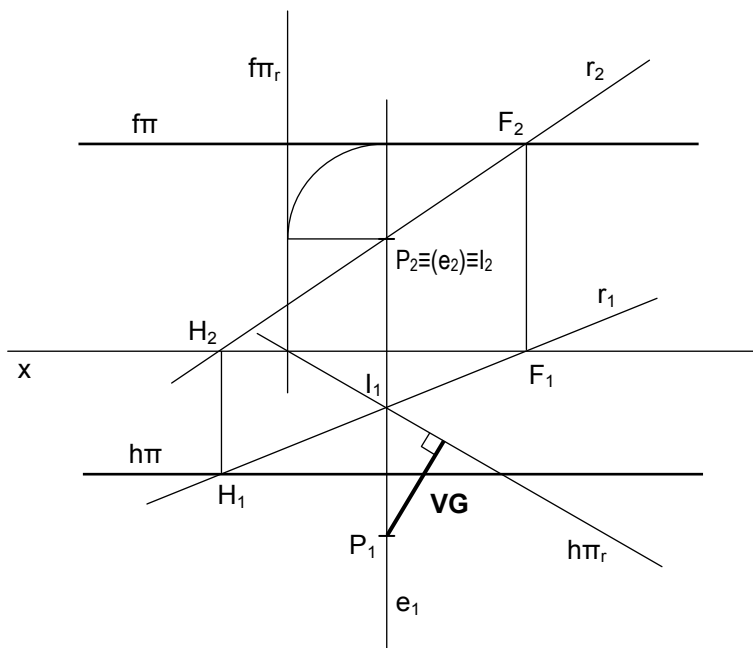
Para determinar a VG da distância entre um ponto e um plano de rampa recorre-se aqui à projeção lateral do ponto e ao traço lateral do plano, que se marca na perpendicular a esse traço do plano. Determina-se aqui também o ponto do plano que fica mais próximo do ponto dado.



Distância entre um ponto e um plano de rampa, utilizando um rebatimento

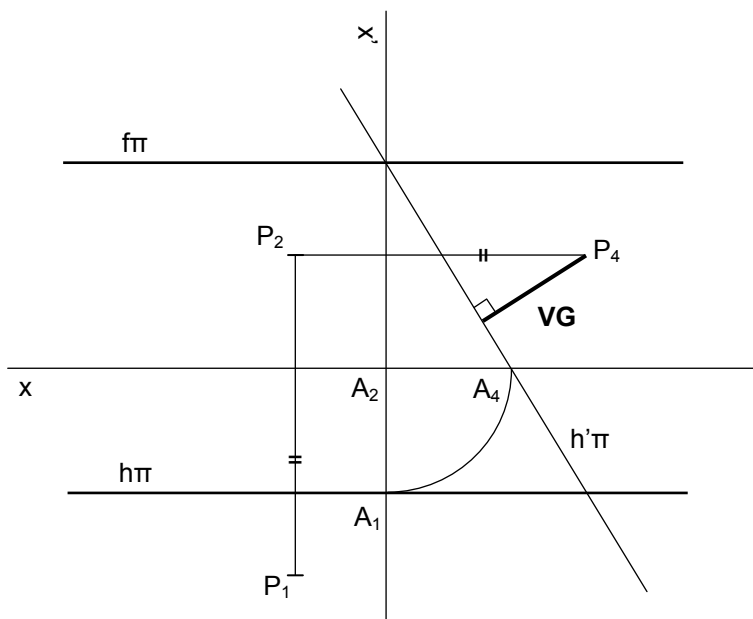
Ao passar um plano de perfil pelo ponto dado, ele intersecta o plano de rampa numa reta de perfil. Essa reta, rebatida juntamente com o ponto, permite encontrar a VG da distância entre o ponto e o plano de rampa.

Nesta página mostra-se como se obtém a verdadeira grandeza da distância entre um ponto e um plano de rampa utilizando rotações e mudanças de plano.



Distância entre um ponto e um plano de rampa, utilizando rotações

O eixo de topo utilizado aqui rodou o plano de rampa para a posição vertical, que é projetante. Desse modo, a VG da distância entre o ponto e o plano observa-se entre a projeção horizontal do ponto e o traço horizontal do plano. A reta r é uma reta oblíqua do plano que se cruza com o eixo no ponto I . Os pontos I e P mantêm-se fixos durante a rotação, mas tal não se indica no traçado para que este não fique sobrecarregado.

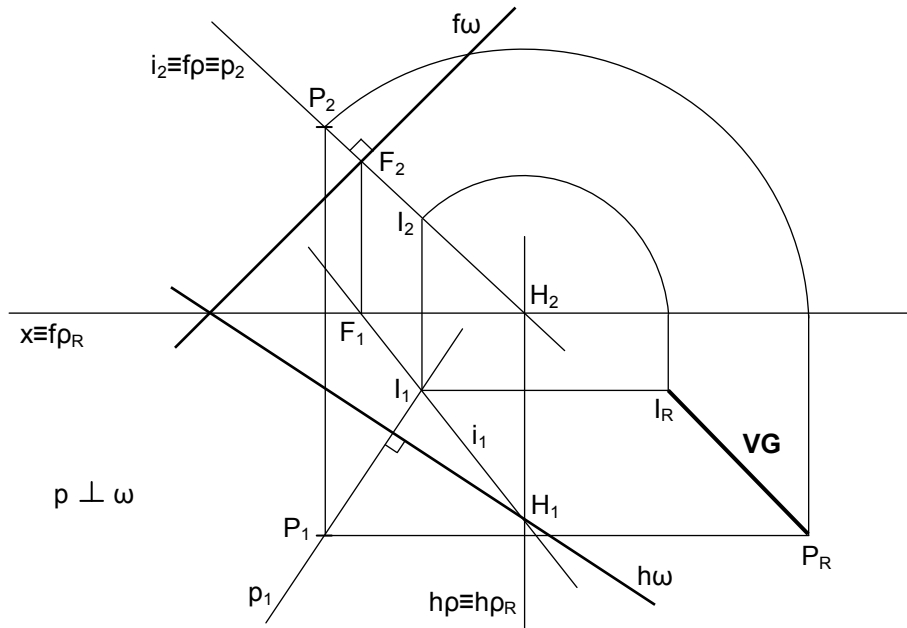


Distância entre um ponto e um plano de rampa, utilizando mudanças de planos

Mudando um dos planos de projeção de modo a que o plano de rampa fique projetante, neste caso projetante horizontal (posição vertical), obtém-se um novo traço do plano e uma nova projeção do ponto dado. A VG determina-se entre esses novos elementos.

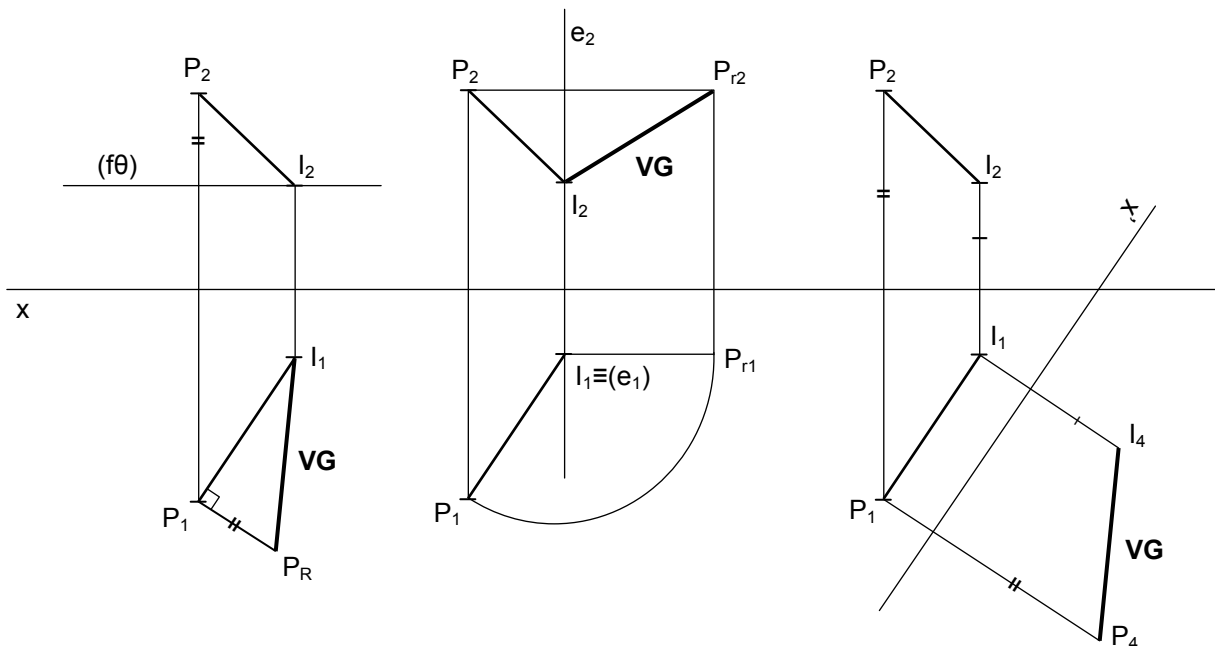
Distância entre um ponto e um plano oblíquo

Mostra-se aqui a determinação do ponto mais próximo dum plano oblíquo ao ponto dado, através de intersecções, e aplicam-se vários processos para determinar a VG da distância entre esses pontos.



Distância entre um ponto e um plano oblíquo, utilizando intersecções e rebatimentos

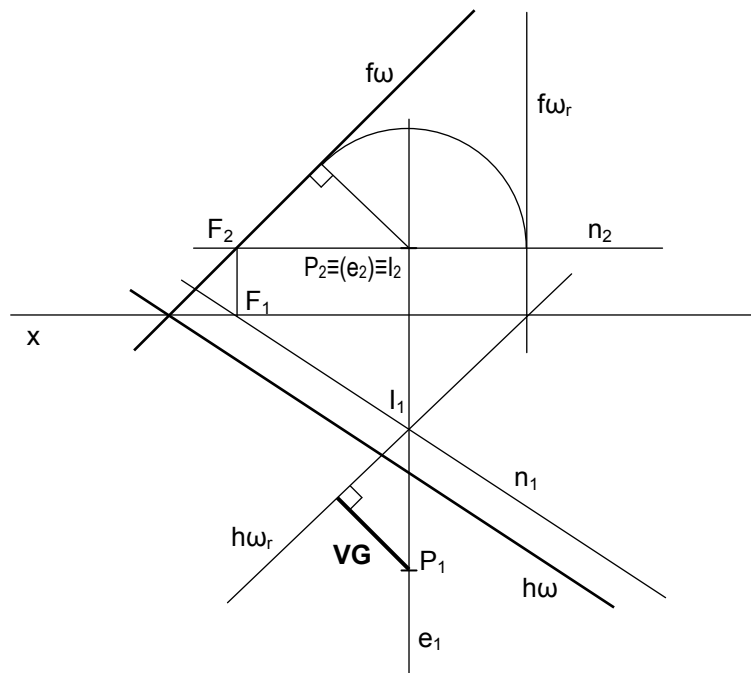
Para determinar a VG da distância entre o ponto P e o plano oblíquo passa-se pelo ponto uma reta perpendicular ao plano, achando-se de seguida a intersecção entre reta e plano, que é o ponto I. Esse ponto é o que fica mais próximo do plano. Aqui determinou-se a VG do segmento [PI] rebatendo para o PHP o plano de topo que se utilizou como auxiliar na intersecção.



Determinação da VG do segmento por outros processos

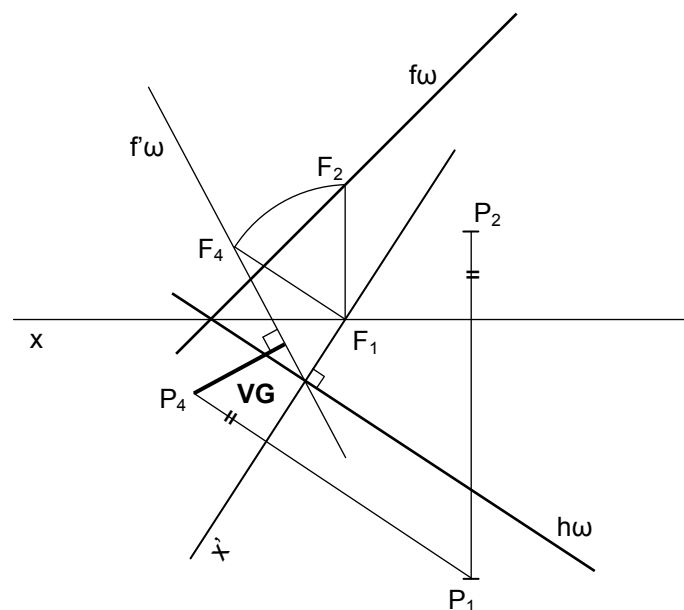
Após determinar a intersecção da reta com o plano (na situação anterior), pode-se determinar a VG do segmento [PI] por outros processos. Aqui exclui-se o traçado anterior e mostra-se apenas a fase final, onde se aplicam: um rebatimento simplificado, uma rotação e uma mudança de plano.

Nesta página mostra-se como se determina a verdadeira grandeza da distância entre um ponto e um plano oblíquo, utilizando rotações e mudanças de plano. Note-se que com estes processos a quantidade de traçado é consideravelmente menor do que sucede na página anterior.



Distância entre um ponto e um plano, utilizando rotações

Utilizando rotações, passa-se um eixo pelo ponto dado. Esse eixo cruza o plano no ponto I, que se determina utilizando uma reta do plano, concorrente com o eixo. O ponto I, por ser fixo, continua a pertencer ao plano quando transformado em vertical, ou seja, projetante horizontal. Por estarem no eixo, nenhum dos pontos de move na rotação.

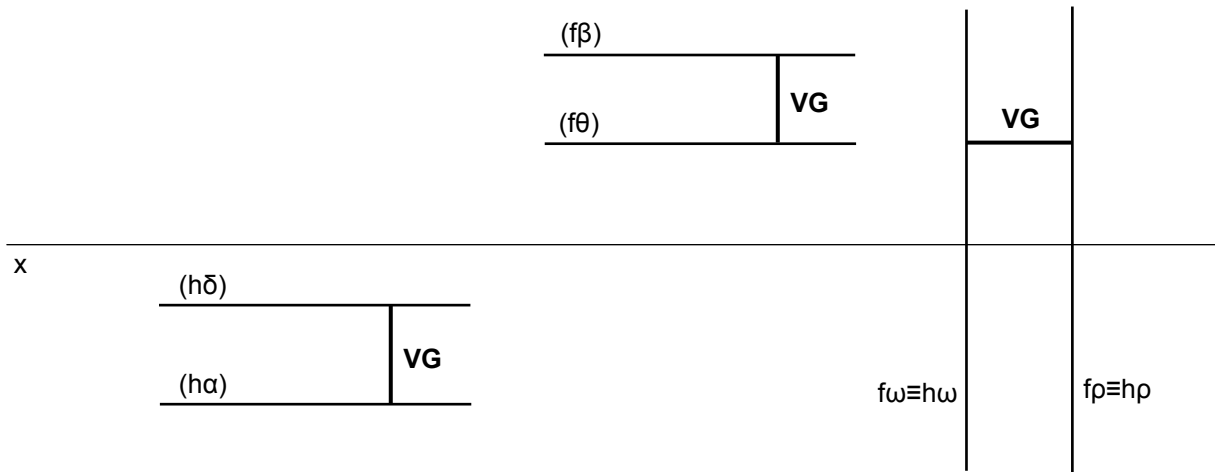


Distância entre um ponto e um plano, utilizando mudanças de planos

Utilizando mudanças de planos há que transformar também o plano oblíquo em projetante. Neste caso o plano ficou de topo. Desse modo, a VG existe entre o novo traço do plano e a nova projeção do ponto.

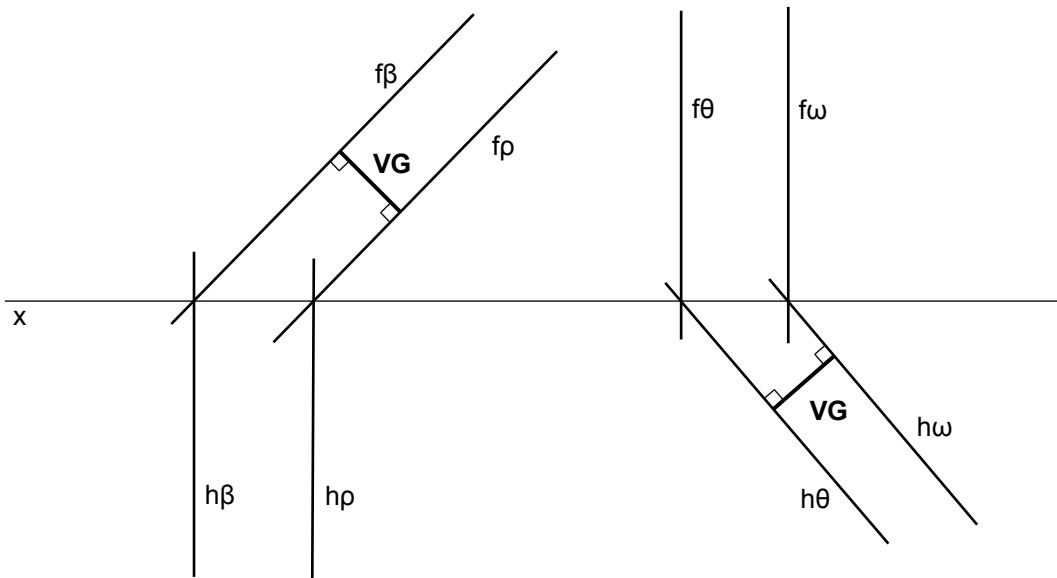
Distâncias entre planos projetantes

O estudo da distância entre dois planos apresenta situações idênticas às que se observam entre um ponto e um plano. Obviamente, a distância entre dois planos envolve sempre um par de planos paralelos. Quando se trata de planos projetantes, a verdadeira grandeza da distância determina-se diretamente.



Distância entre planos frontais, horizontais e de perfil

A VG da distância entre estes planos indica-se diretamente, bastando traçar um segmento de reta perpendicular aos seus traços.



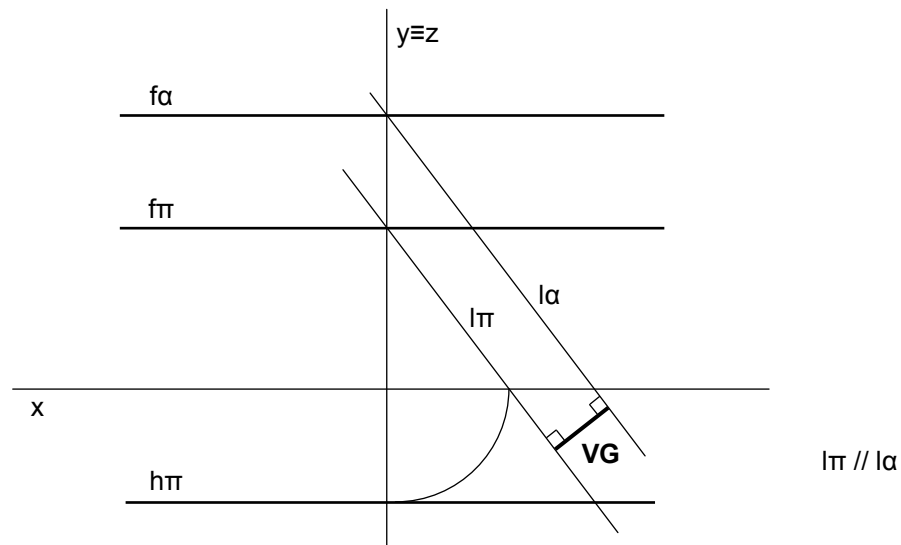
Distância entre planos de topo e verticais

A VG da distância entre estes planos indica-se diretamente com um segmento de reta perpendicular aos traços dos planos que são oblíquos ao eixo x . Ou seja, no plano de topo a VG indica-se entre os seus traços frontais, no plano vertical indica-se entre os traços horizontais.

Distância entre planos de rampa

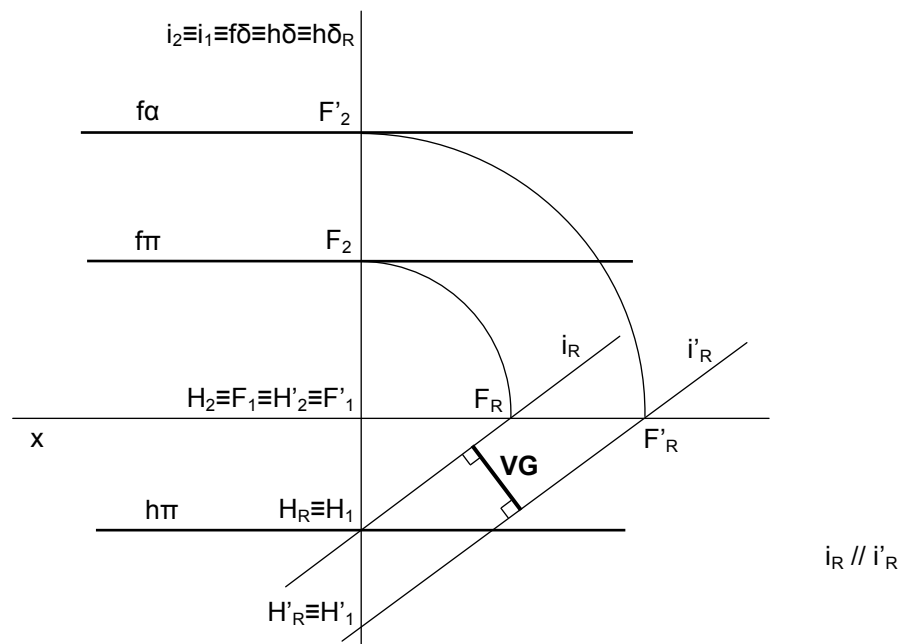
No plano de rampa, por não ser projetante, aplicam-se processos auxiliares para a determinação da verdadeira grandeza da distância entre eles. Nesta página mostram-se dois processos.

Um dos planos está representado apenas por um dos traços uma vez que, à partida, não é possível representar dois planos de rampa pelos seus traços ficando com a garantia de que sejam paralelos.



Distância entre planos de rampa, utilizando o plano lateral de projeção

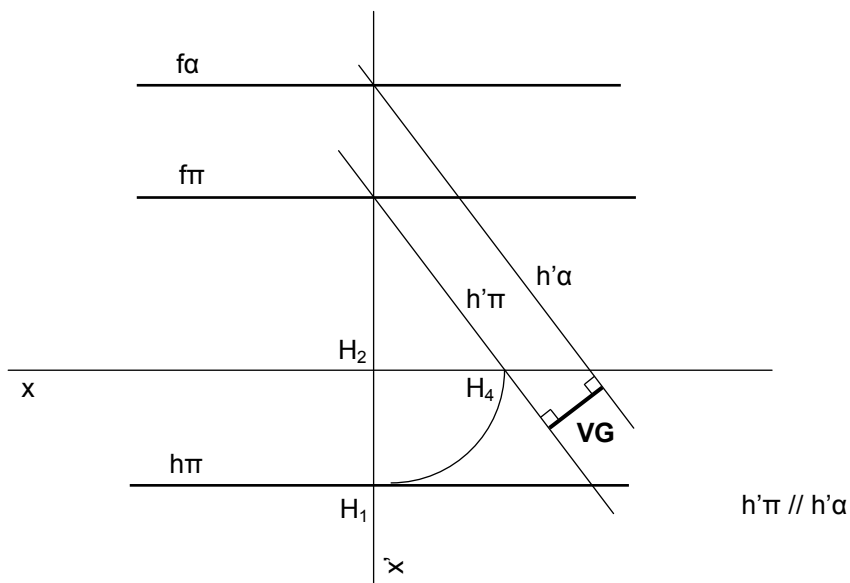
Os planos de rampa são perpendiculares ao PLP, ou seja, são projetantes sobre esse plano, por isso a VG da distância entre eles pode determinar-se nos seus traços laterais. Considerando à partida que os planos são paralelos, os seus traços laterais também o são.



Distância entre planos de rampa, utilizando rebatimentos

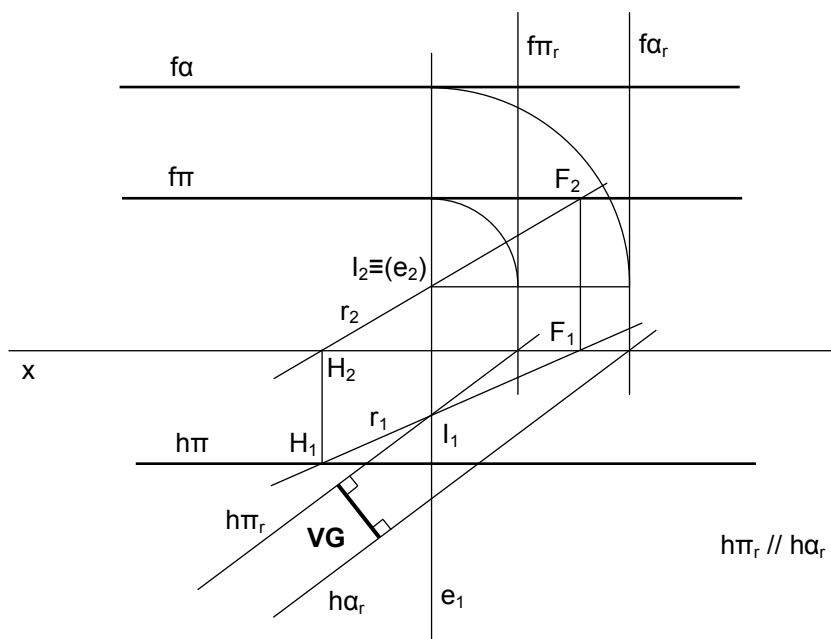
Um plano de perfil é perpendicular aos planos de rampa; cortando-os com um plano de perfil, resultam retas de perfil paralelas. Essas retas rebatidas dão-nos a VG da distância entre os planos.

Nesta página mostra-se como se determina a verdadeira grandeza da distância entre dois planos de rampa, através de outros processos.



Distância entre planos de rampa, utilizando mudanças de planos

Quando se utiliza o método das mudanças de planos, o objetivo é transformar os planos de rampa em verticais ou de topo. Aqui foram transformados em planos verticais. A VG da distância entre os planos é igual à distância entre os seus novos traços.

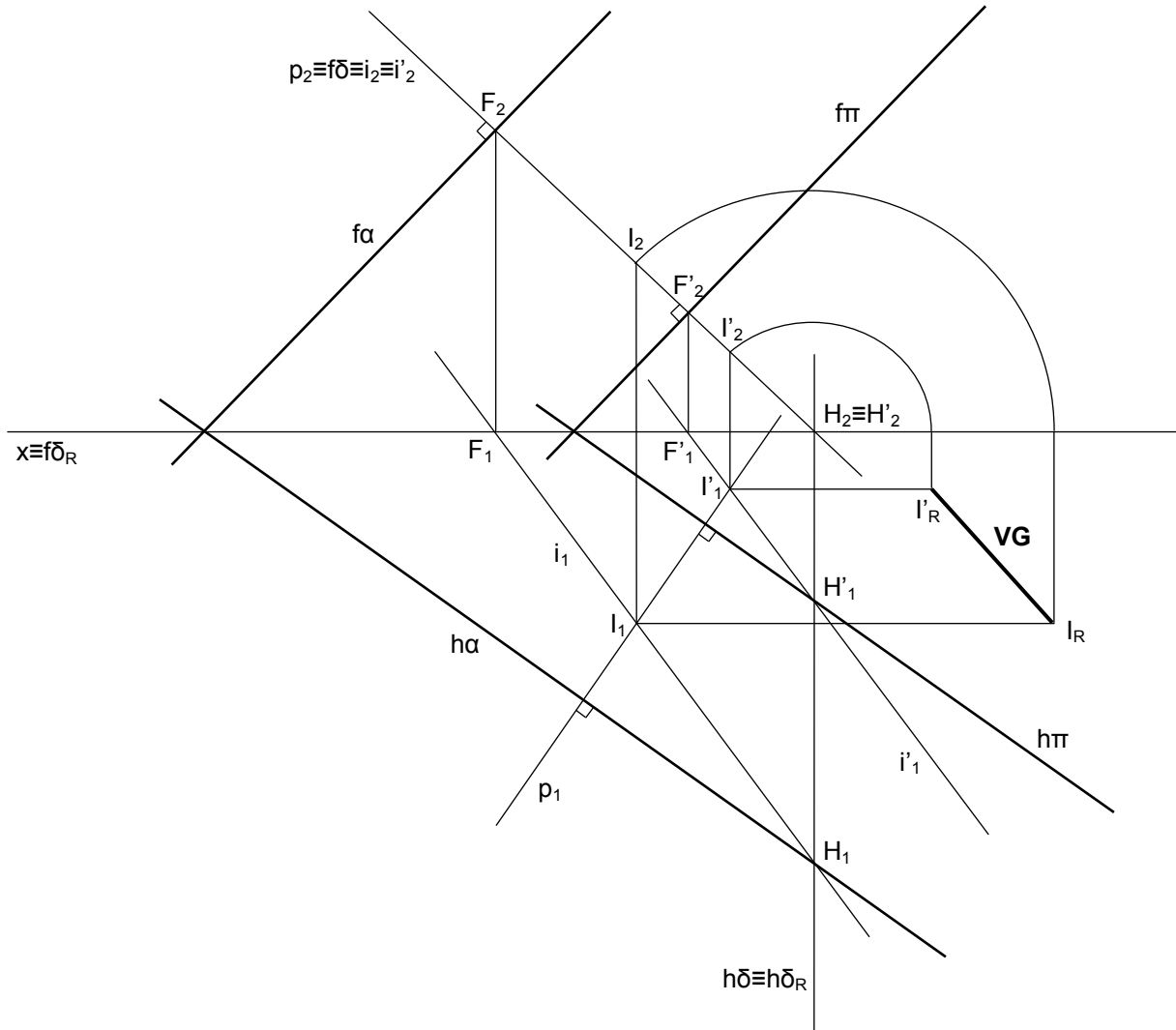


Distância entre planos de rampa, utilizando rotações

Quando se utiliza rotações, há que transformar também os planos de rampa em verticais ou de topo. Aqui foram também transformados em planos verticais. A VG da distância entre os planos é igual à distância entre os seus novos traços horizontais.

Distância entre planos oblíquos

A distância entre dois planos oblíquos pode também ser determinada por vários processos. Nesta página mostra-se o processo dos rebatimentos associado a intersecções.

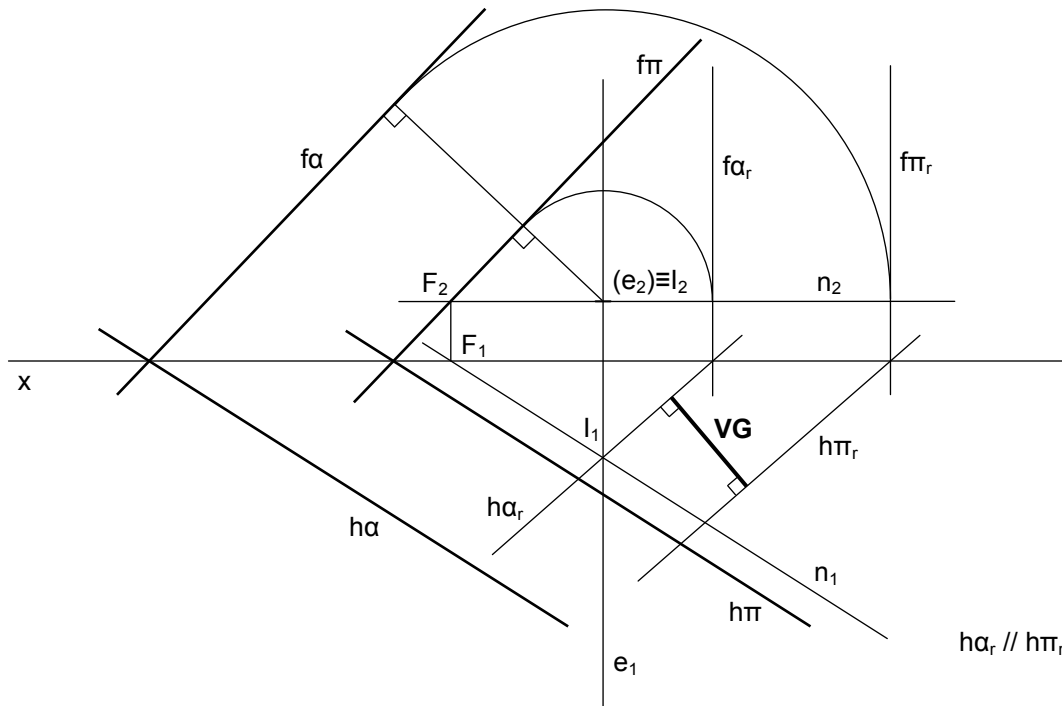


Distância entre planos oblíquos, utilizando intersecções e rebatimentos

Intersectando os planos com uma reta que lhes é perpendicular, determina-se a VG da distância entre os pontos daí resultantes, pois equivale à distância entre os planos. Aqui obteve-se essa VG rebatendo o plano que se utilizou como auxiliar para a determinação da intersecção entre a reta e os planos.

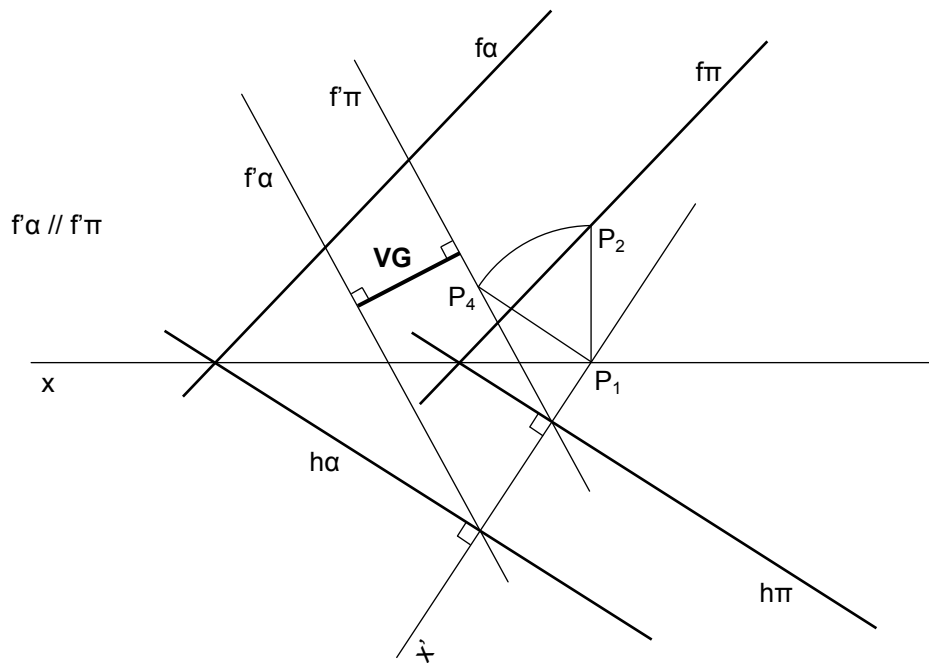
Após determinados os pontos de intersecção entre a reta e os planos, a VG do segmento pode ser determinada por qualquer outro dos processos já mostrados em páginas anteriores.

Mostra-se aqui como se determina a verdadeira grandeza da distância entre dois planos oblíquos utilizando rotações e mudanças de planos.



Distância entre planos oblíquos, utilizando rotações

Para determinar a VG da distância é necessário tornar os planos projetantes. Aqui ficaram verticais, pelo que a VG se encontra entre os seus novos traços horizontais. A reta n serve para determinar o ponto de intersecção do eixo com o plano π , não sendo necessário fazer o mesmo com o plano α uma vez que, depois de rodarem, os planos continuam a ser paralelos.

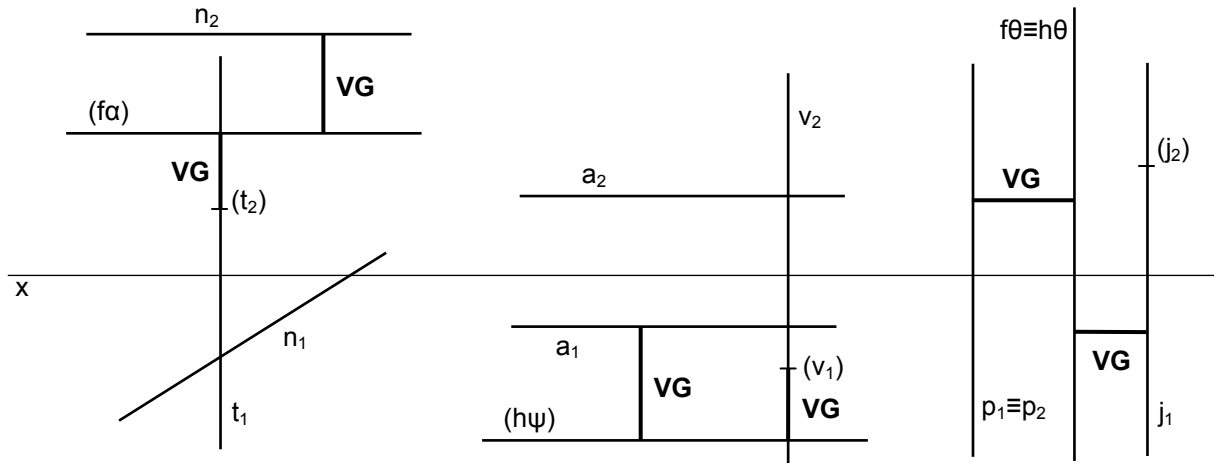


Distância entre dois planos, utilizando mudanças de planos

Também aqui é necessário tornar os planos projetantes. Neste caso ficaram de topo. Para isso coloca-se o eixo x' perpendicular aos traços horizontais dos planos e determinam-se os novos traços frontais, que serão também paralelos entre si. E é entre estes que se indica a VG.

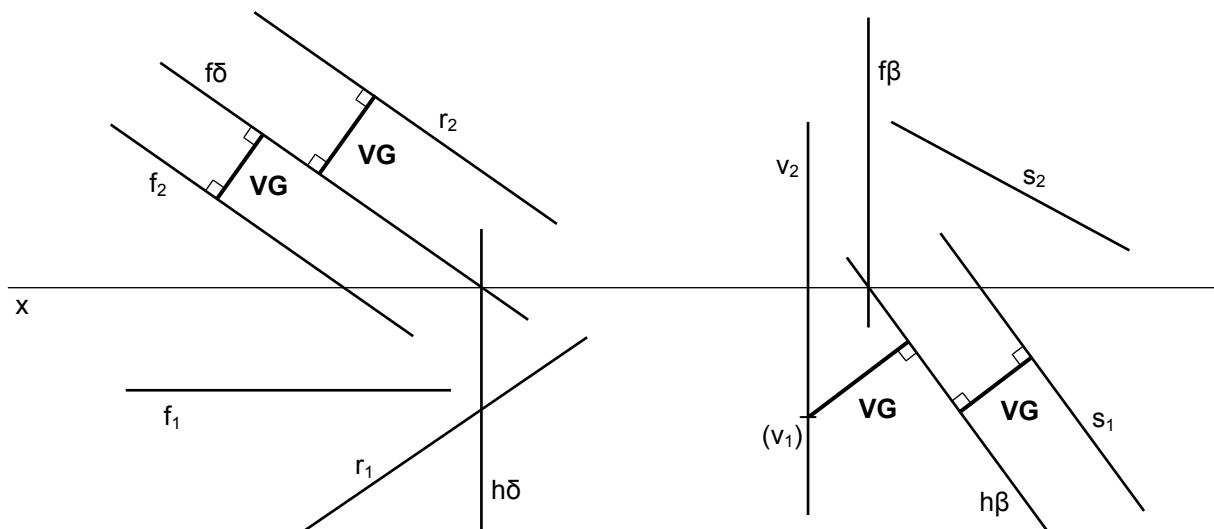
Distância entre uma reta e um plano projetante

Só se pode falar em distância entre uma reta e um plano quando estes elementos são paralelos. A verdadeira grandeza da distância entre uma reta e um plano projetante determina-se diretamente. Nestes traçados, para cada plano apresentam-se duas retas.



Distância entre retas e os planos horizontal, frontal e de perfil

Como se pode observar, é fácil deduzir, a VG da distância entre uma reta e um plano horizontal ou frontal indica-se diretamente, na perpendicular entre o traço do plano e a projeção homónima da reta. Sendo os traços do plano de perfil coincidentes, e sendo este também um plano projetante, a VG da distância a uma reta indica-se de modo idêntico.

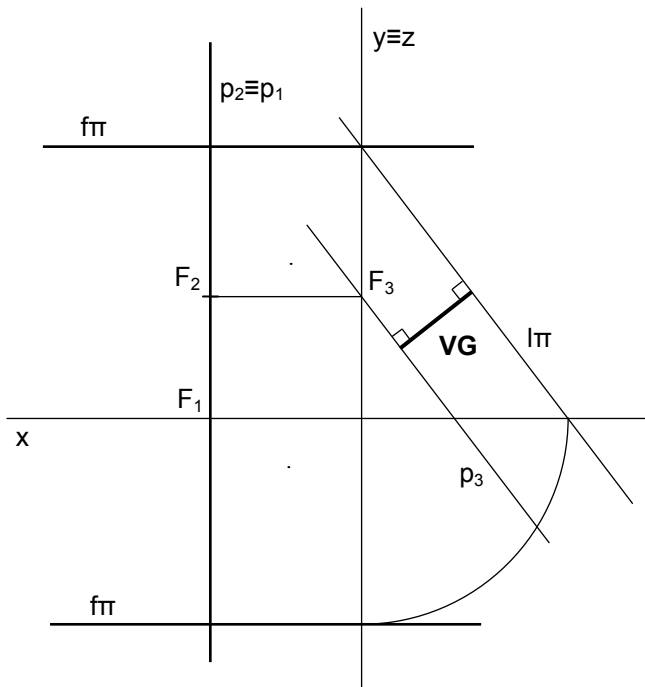


Distância entre retas e os planos de topo e vertical

A VG da distância entre uma reta e um plano de topo surge entre a sua projeção frontal e o traço homónimo do plano. No caso do plano vertical surge entre a sua projeção horizontal e o traço homónimo do plano.

Distância entre uma reta e um plano de rampa

Mostram-se aqui três situações, cada uma contendo uma das retas que pode ser paralela ao plano de rampa. Todas se resolvem aqui com recurso ao plano lateral de projeção.



Distância entre uma reta de perfil e um plano de rampa

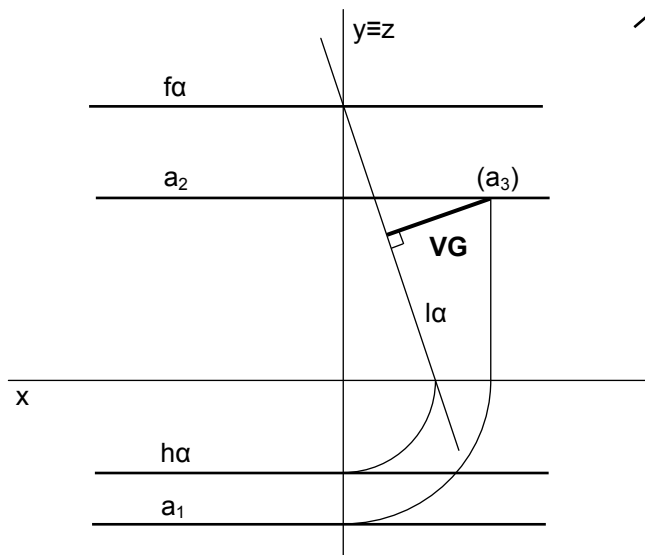
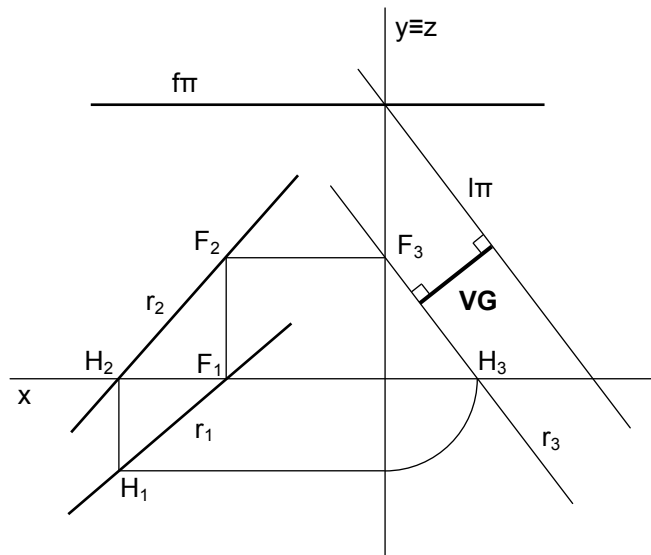
Uma reta de perfil e um plano de rampa paralelos têm a projeção e o traço laterais também paralelos entre si. Assim a VG pode ser indicada entre esses elementos.

Aqui não foi representado o traço horizontal da reta, mas pode-se determinar a partir da sua projeção lateral.

Distância entre uma reta oblíqua e um plano de rampa

Uma reta oblíqua paralela a um plano de rampa também tem a projeção lateral paralela ao traço lateral do plano, pelo que a VG se pode determinar entre esses elementos.

Aqui não está representado o traço horizontal do plano, mas pode-se representar a partir do seu traço lateral.

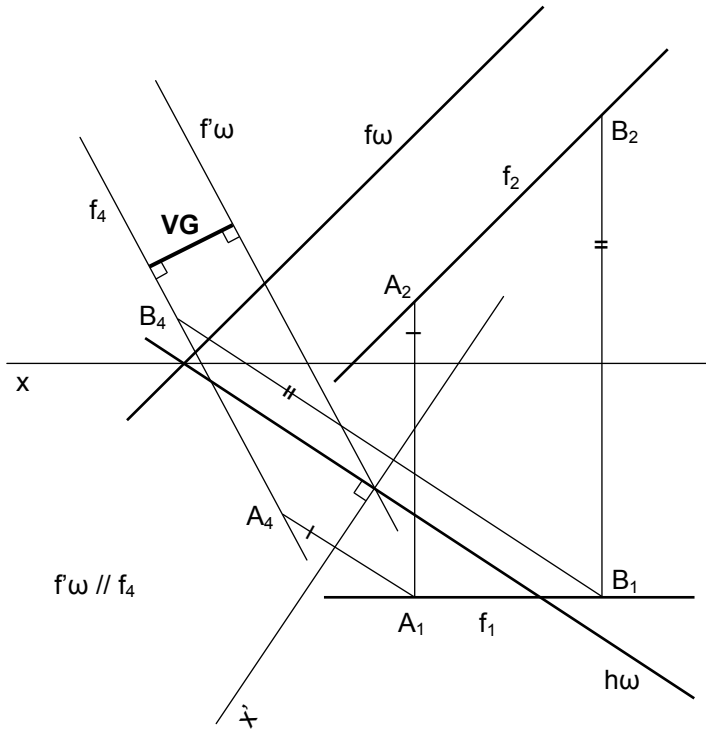


Distância entre uma reta fronto-horizontal e um plano de rampa

A reta fronto-horizontal tem a sua projeção lateral reduzida a um ponto. A distância entre essa projeção e o traço lateral do plano corresponde à VG da distância entre a reta e o plano.

Distância entre uma reta e um plano oblíquo

Tal como sucedeu com o plano de rampa, é interessante abordar todas as retas paralelas ao plano oblíquo. Contudo, mostram-se apenas as situações que envolvem as retas oblíqua e frontal, dado que pelo método das mudanças de planos, que aqui se optou por utilizar (por envolver menos traçado do que outros processos), todas as situações ficam semelhantes.

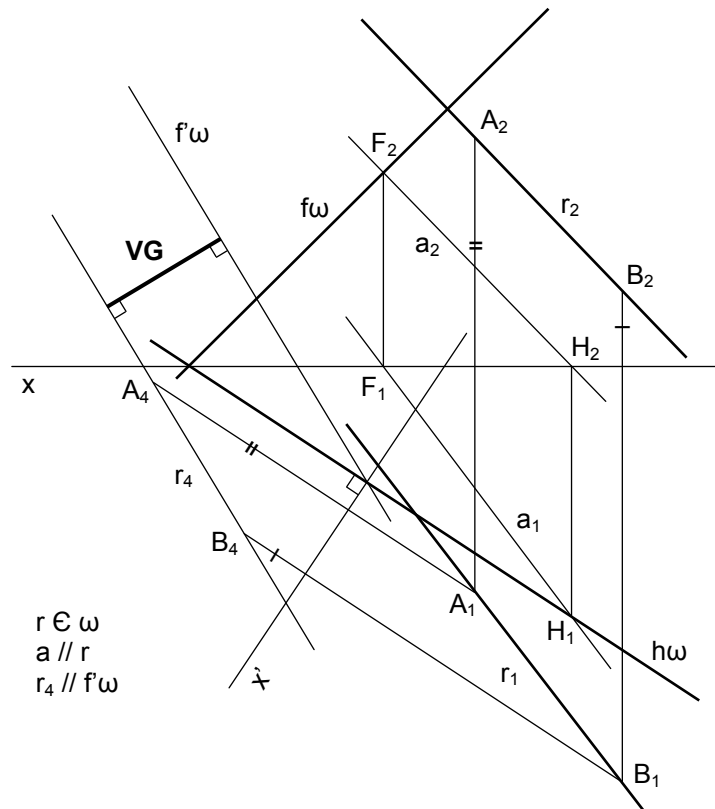


Distância entre uma reta frontal e um plano oblíquo

Para que a reta frontal seja paralela ao plano basta que seja paralela ao traço frontal do plano. Através da mudança do PFP, colocou-se o plano oblíquo de topo. A nova projeção frontal da reta fica paralela ao novo traço do plano. Pode-se optar por colocar o plano na posição vertical.

Distância entre uma reta oblíqua e um plano oblíquo

Esta situação é idêntica à anterior, com a diferença de aqui se traçar uma reta no plano para se representar uma reta que lhe seja paralela. Isto é, a reta a pertence ao plano, a reta r é paralela a essa, por isso é paralela ao plano. Também aqui se podia ter optado por colocar o plano na posição vertical.

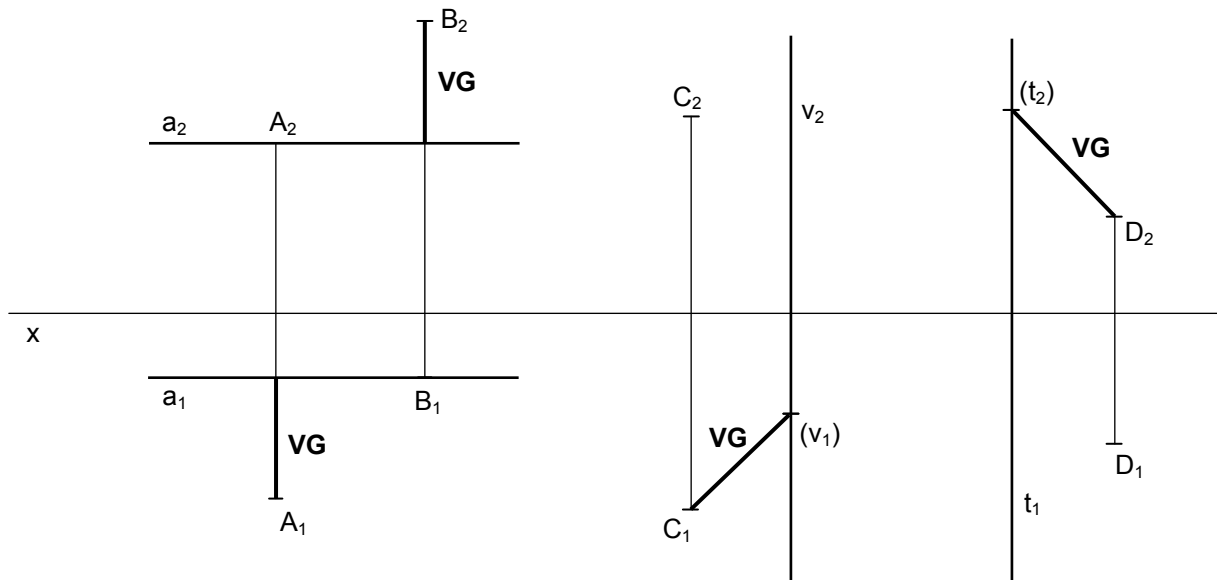


$r \in \omega$
 $a \parallel r$
 $r_4 \parallel f\omega$

Distâncias de resolução direta entre um ponto e uma reta

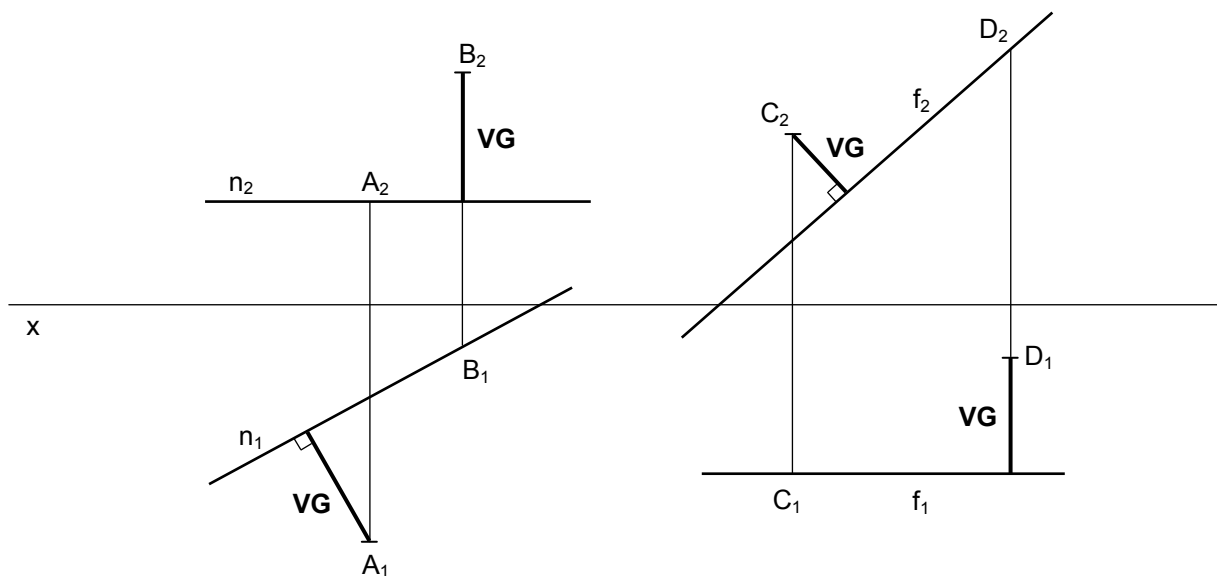
Quando um ponto e uma reta podem definir um plano projetante, a determinação da verdadeira grandeza da distância entre essas figuras determina-se diretamente. Excetua-se destas situações o caso em que a reta é de perfil.

Para se observar um maior número de situações, apresentam-se aqui dois pontos para cada reta.



Distâncias entre pontos e as retas fronto-horizontal, vertical e de topo

No caso da reta fronto-horizontal, a VG determina-se diretamente quando uma projeção do ponto se situa na projeção homônima da reta. Nas retas vertical e de topo a VG encontra-se entre a projeção da reta que está reduzida a um ponto e a projeção homônima do ponto dado.

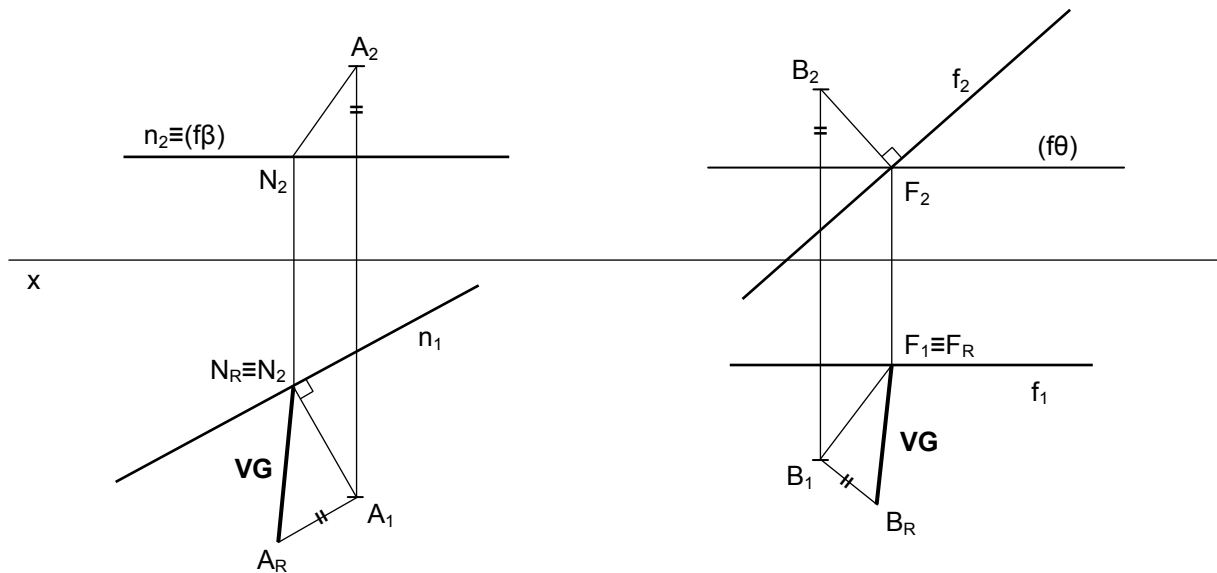


Distâncias entre pontos e as retas horizontal e frontal

Os pontos aqui representados têm uma projeção situada na projeção homônima da reta. Só nessas circunstâncias se determina diretamente a VG entre ponto e estas retas.

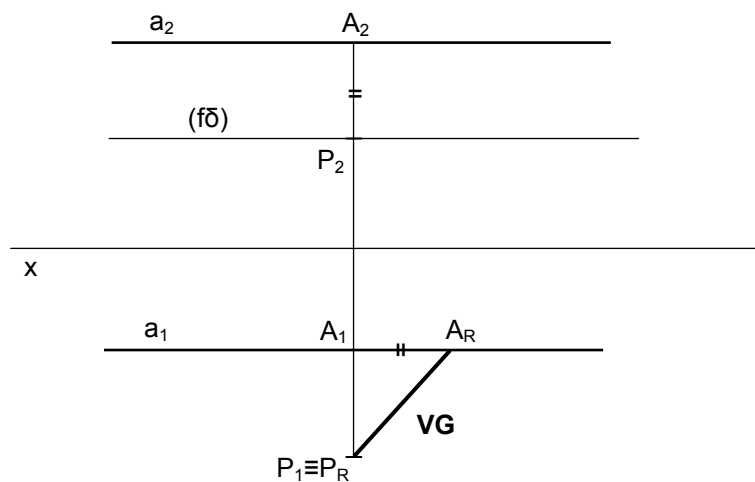
Distâncias entre um ponto e as retas horizontal, frontal e fronto-horizontal

Os casos que aqui se apresentam têm em comum o facto de ser possível determinar diretamente o ponto da reta que fica mais próximo do ponto dado, bastando, de seguida, determinar a verdadeira grandeza dessa distância. Opta-se aqui por um rebatimento simplificado, por ser o processo que acarreta menos traçado.



Distância entre um ponto e as retas horizontal e frontal

O ponto N é o ponto da reta n que se situa mais próximo do ponto A. O ponto F é o ponto da reta f que se situa mais próximo do ponto B. Em ambos os casos a VG foi determinada rebatendo o segmento de reta sobre um plano horizontal.

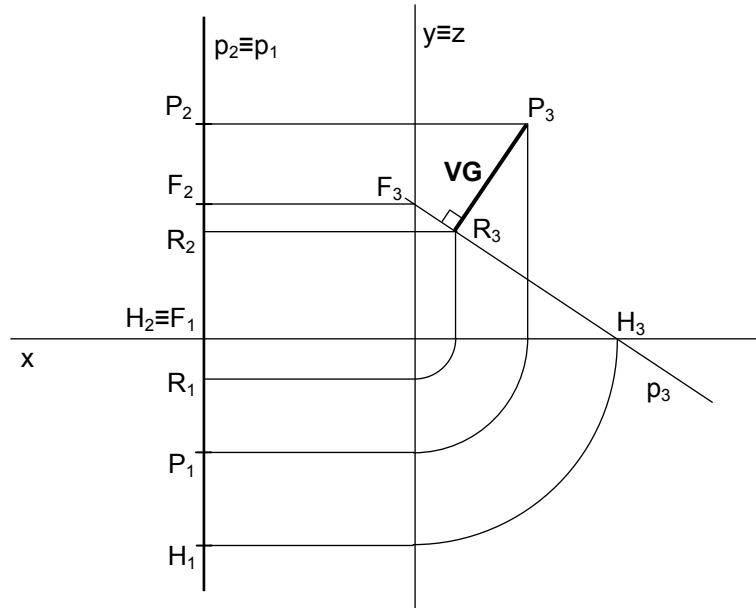


Distância entre um ponto e uma reta fronto-horizontal

O ponto A é o ponto da reta que se situa mais próximo do ponto dado, determinando-se diretamente. Os dois pontos definem um segmento de reta de perfil, sendo a sua VG determinada, também aqui, através de um rebatimento simplificado sobre um plano horizontal.

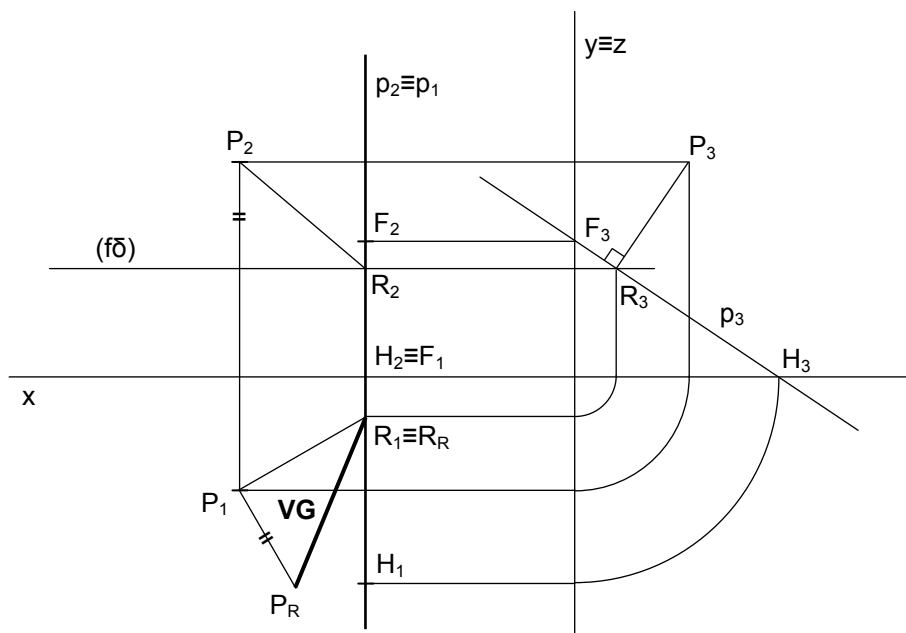
Distância entre um ponto e uma reta de perfil

Mostram-se aqui duas situações, uma em que o ponto tem a mesma abscissa da reta, outra em que o ponto e a reta têm valores diferentes de abscissa.



Distância entre um ponto e uma reta de perfil com a mesma abscissa

Neste caso, a VG da distância entre o ponto e a reta pode determinar-se na projeção lateral, onde também se determina o ponto R, que é o mais próximo de P.

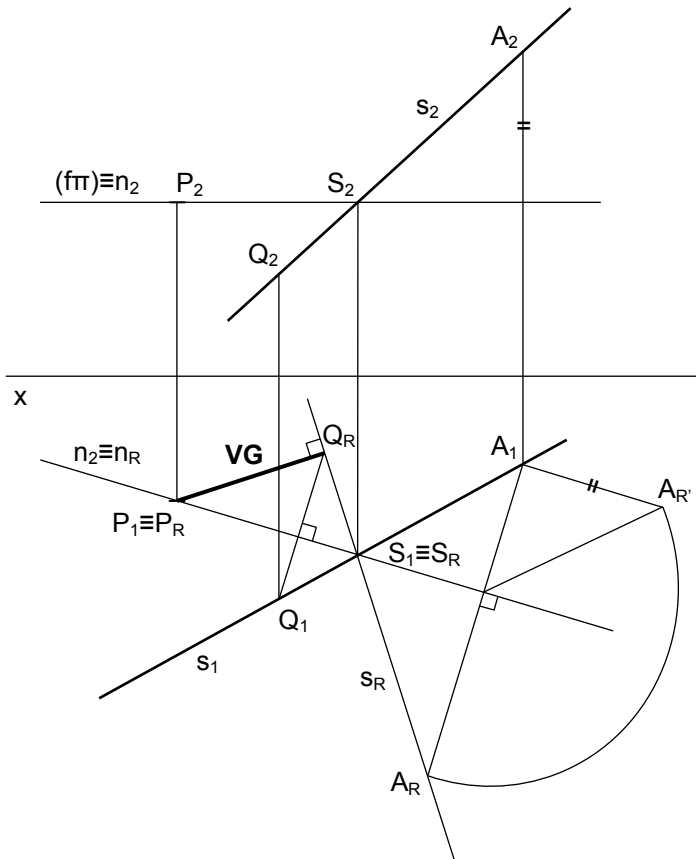


Distância entre um ponto e uma reta de perfil com diferentes abscissas

Neste caso, a projeção lateral não nos dá a VG da distância entre o ponto e a reta, mas permite-nos determinar o ponto R, que está mais próximo do ponto dado. Colocando esse ponto nas projeções principais determina-se aí a VG do segmento que os une.

Distância entre um ponto e uma reta oblíqua

Mostram-se aqui duas situações com uma pequena diferença, suficiente para tornar a resolução de uma bem diferente da da outra.



Distância entre um ponto e uma reta oblíqua

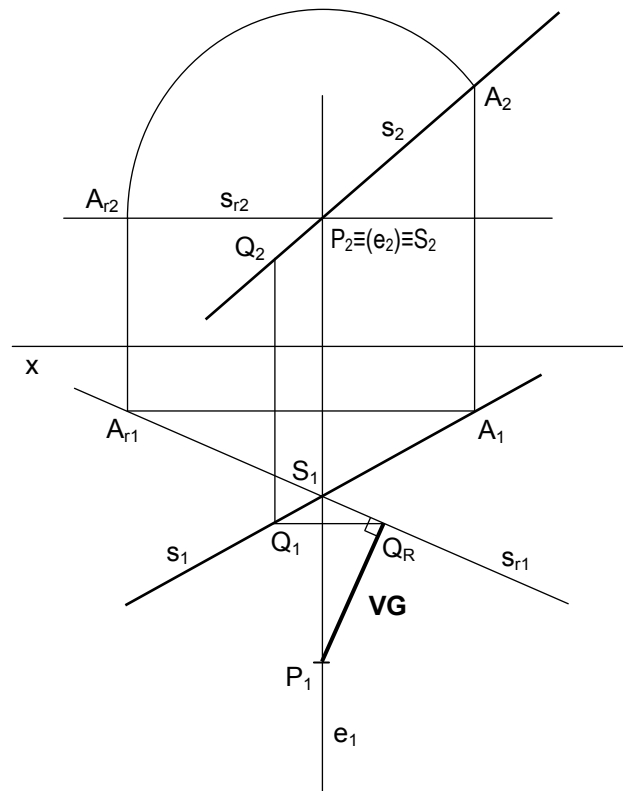
Para determinar a VG da distância entre o ponto P e a reta s, rebata-se aqui a reta sobre um plano horizontal que contém o ponto, que assim fica fixo. A VG determina-se entre ele e a reta s rebatida.

Caso se pretenda saber as projeções do ponto da reta que está mais próximo do ponto dado, traça-se no rebatimento uma linha perpendicular à charneira a partir desse ponto rebatido, aqui indicado por Q.

Distância entre um ponto e uma reta oblíqua, formando um plano projetante

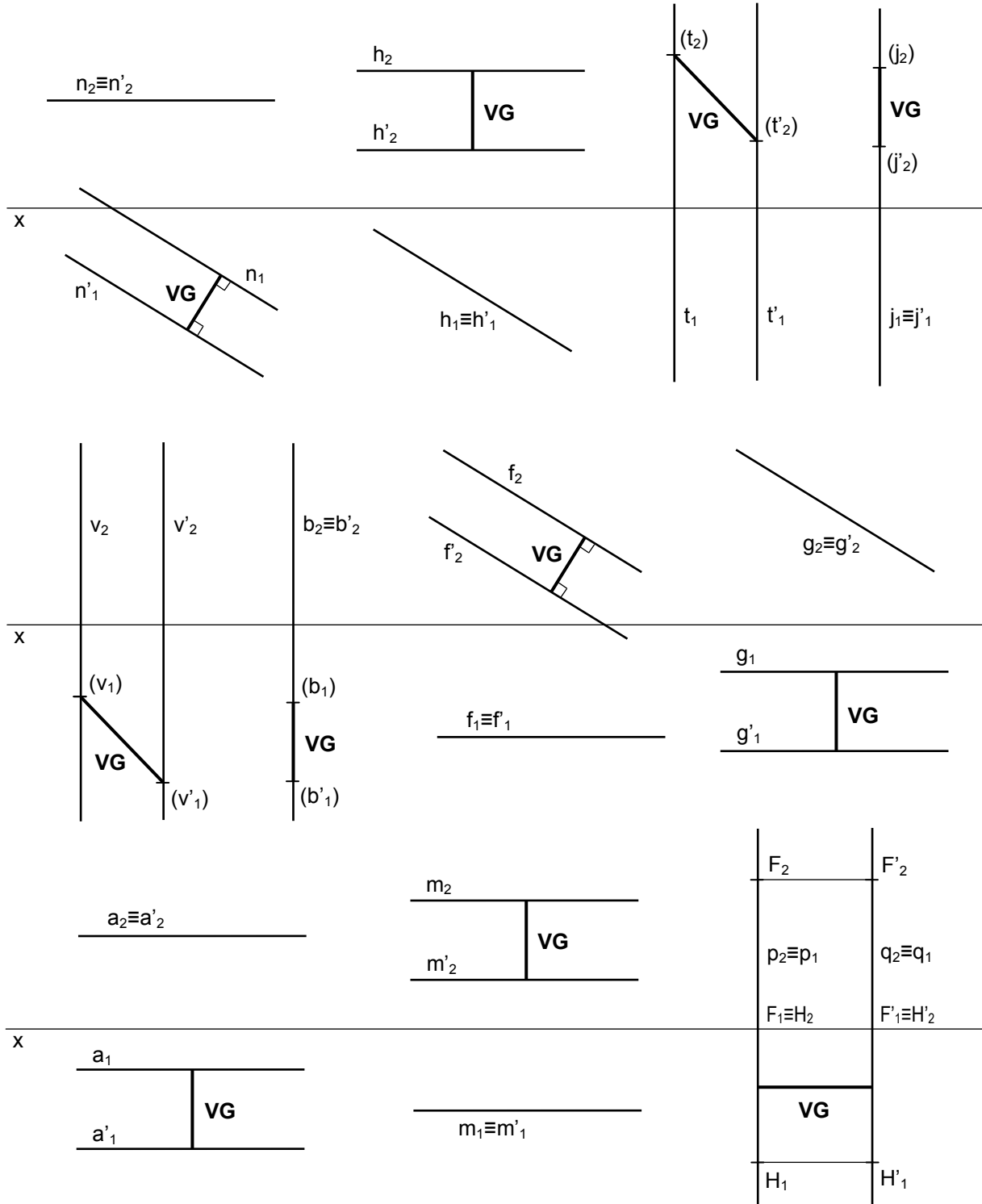
Como na anterior situação, nesta também se pode utilizar um rebatimento, mas aqui optou-se uma rotação. Estando a projeção frontal do ponto P na projeção homônima da reta s, aplicou-se aqui um eixo de topo contendo esse ponto. A reta foi rodada para a posição horizontal com ajuda do ponto A. S é o ponto onde o eixo cruza a reta dada. Q é o ponto da reta que fica mais próximo do ponto dado.

Os pontos P e S ficam fixos na rotação, mas tal não se indica para não sobrecarregar o traçado com letras.



Distâncias de resolução direta entre retas paralelas

Apresentam-se aqui várias situações em que a distância entre duas retas paralelas se pode determinar diretamente.

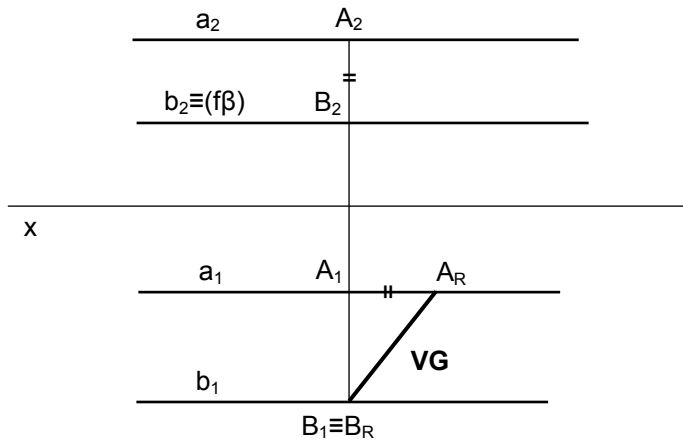


Distâncias entre retas paralelas, com resolução direta

Em todas estas situações se encontra diretamente a VG da distância entre duas retas numa das suas projeções.

Distâncias entre retas fronto-horizontais, oblíquas, horizontais e frontais paralelas

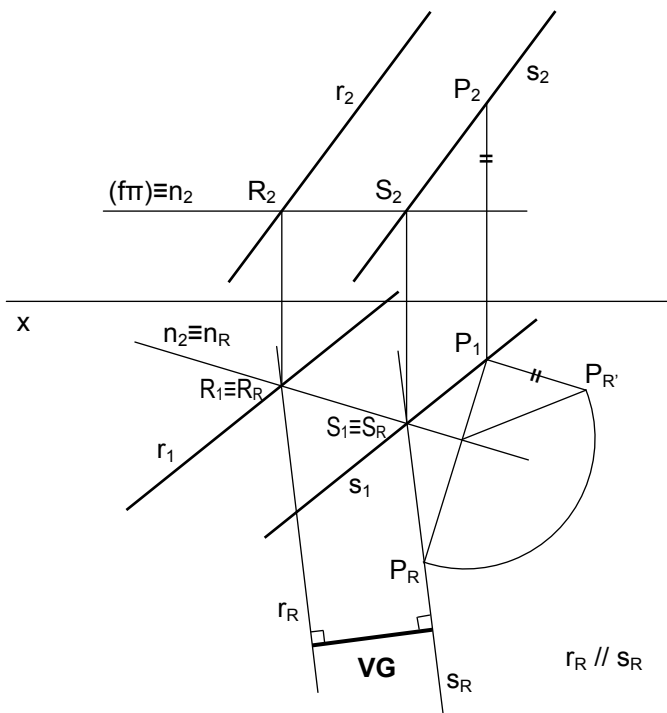
Mostram-se aqui três situações resolvidas por três processos diferentes, que são os que envolvem menos traçado. Não se mostram as retas frontais dada a semelhança com as horizontais.



Distância entre retas horizontais paralelas

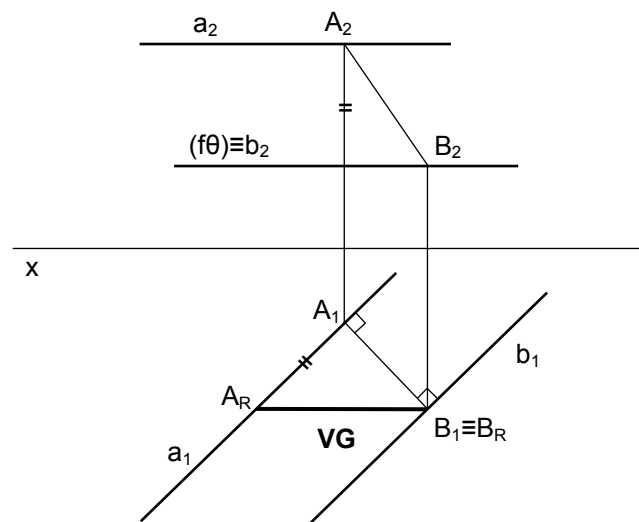
Um segmento de reta perpendicular às projeções horizontais destas retas, e com um extremo em cada uma delas, é-lhes perpendicular. A sua VG, neste caso determinada também com um rebatimento simplificado sobre um plano horizontal, é a VG da distância entre as retas.

Com retas frontais o segmento a utilizar é perpendicular às suas projeções frontais.



Distância entre retas fronto-horizontais

O processo mais simples para determinar a VG entre estas retas consiste em achar a VG de um segmento de reta de perfil cujos extremos se situam nelas. Neste caso aplicou-se um rebatimento simplificado sobre um plano horizontal.

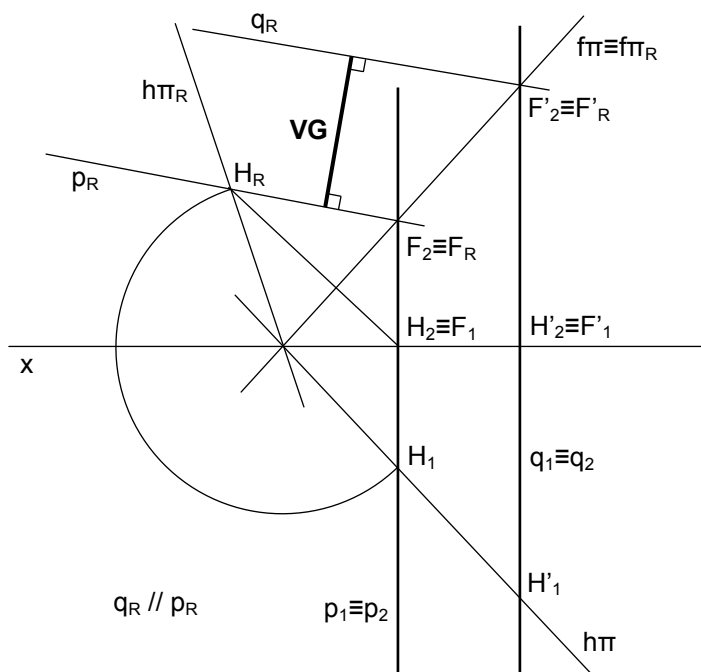


Distância entre retas oblíquas paralelas

Rebatendo as retas sobre um plano horizontal (ou frontal) obtém-se a VG da distância entre as retas. Aqui o rebatimento da reta s é feito com a ajuda do ponto P. Rebatidas, as retas continuam paralelas.

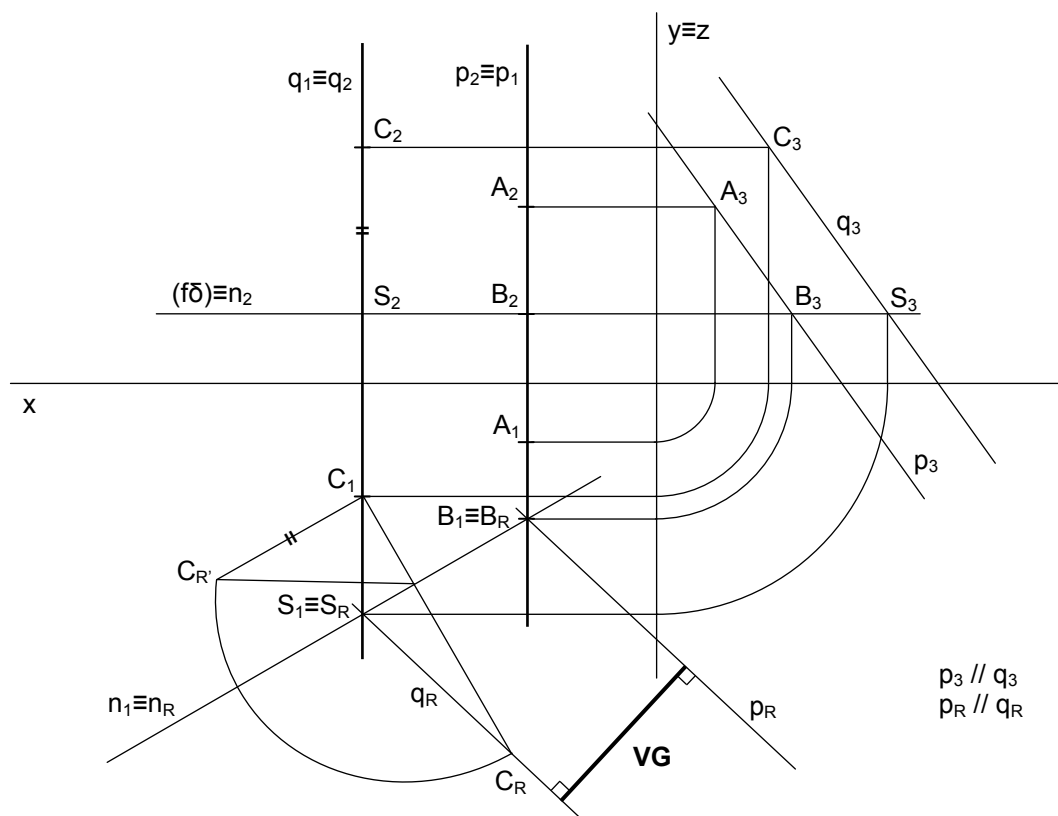
Distância entre retas de perfil paralelas

Aqui mostram-se duas situações relativas à determinação da verdadeira grandeza entre duas retas de perfil. Numa delas recorre-se a um rebatimento, na outra às projeções laterais e ao rebatimento.



Distância entre retas de perfil definidas pelos traços

Se as retas de perfil estão definidas pelos seus traços, tem-se um acesso fácil aos traços do plano que as contém. Neste caso rebateu-se esse plano sobre o PFP. Este processo pode aplicar-se também a duas retas frontais, horizontais ou oblíquas, se se tiver acesso aos traços do plano que as contém. Caso não se tenha acesso aos traços do plano, ou o cruzamento destes se dê fora dos limites do papel, deve utilizar-se o processo aplicado no caso que se segue.

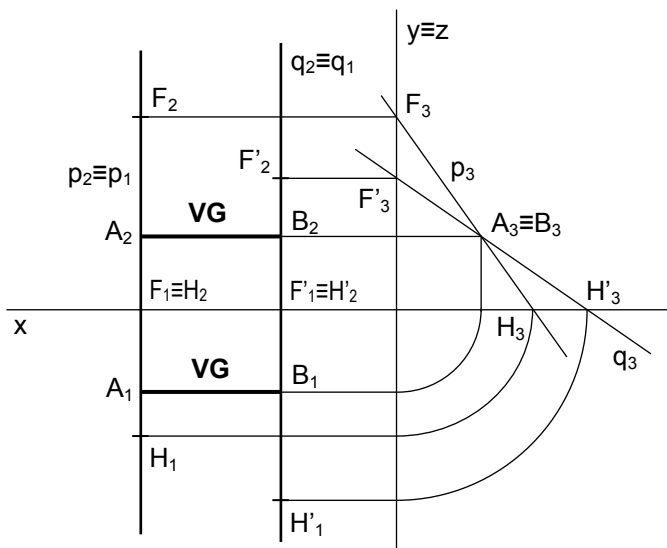
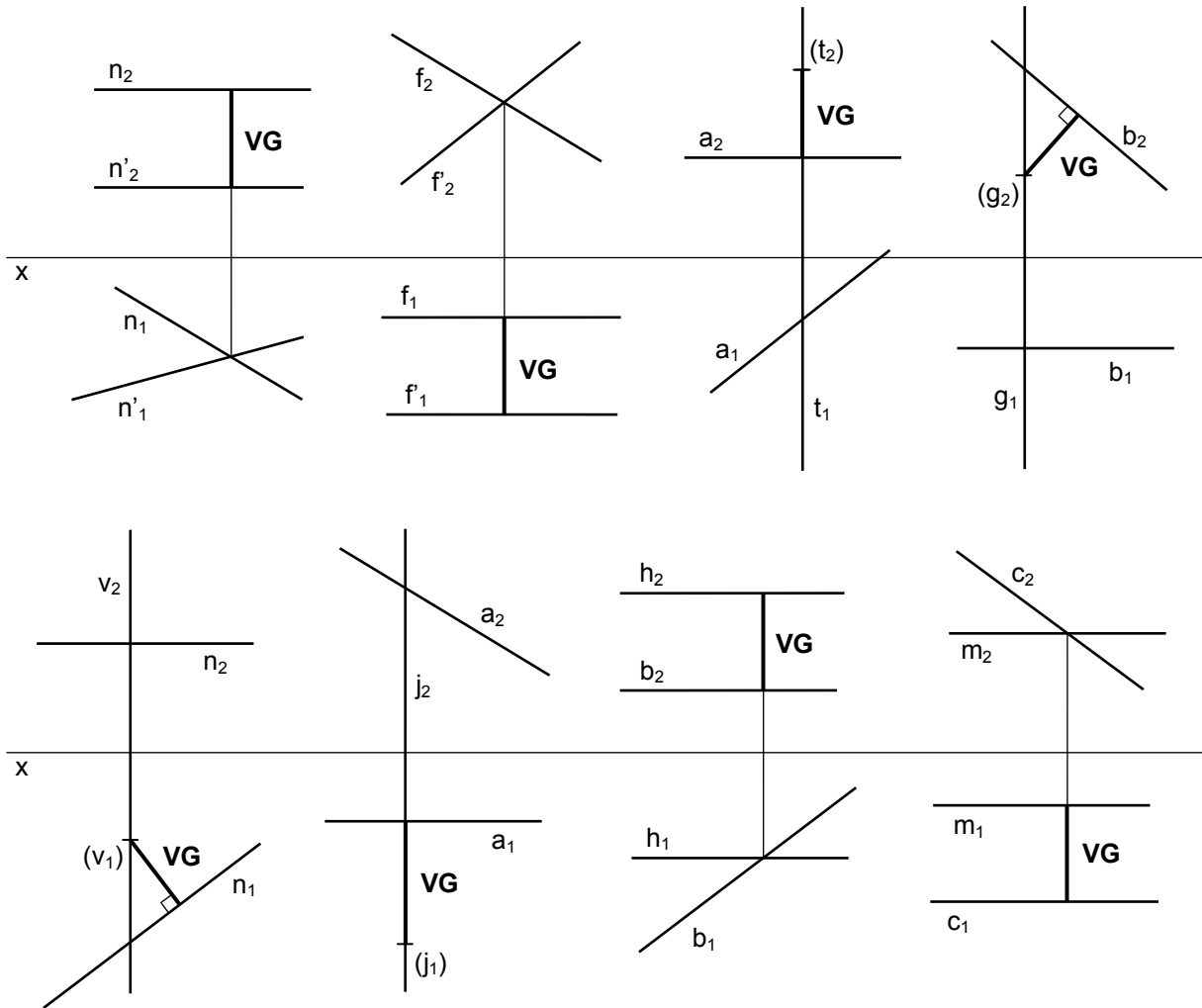


Distância entre retas de perfil definidas por pontos que não os traços

A reta p é dada pelos pontos A e B , a reta q é dada pelo ponto C e sabe-se que é paralela a p . O plano horizontal passa pelo ponto B e pelo ponto S , cuja projeção horizontal se determina através da lateral. Esses pontos definem a charneira. O rebatimento é feito utilizando o ponto C .

Distâncias de resolução direta entre retas enviesadas

Observam-se aqui diversas situações daquelas cuja verdadeira grandeza entre retas enviesadas se pode determinar diretamente.



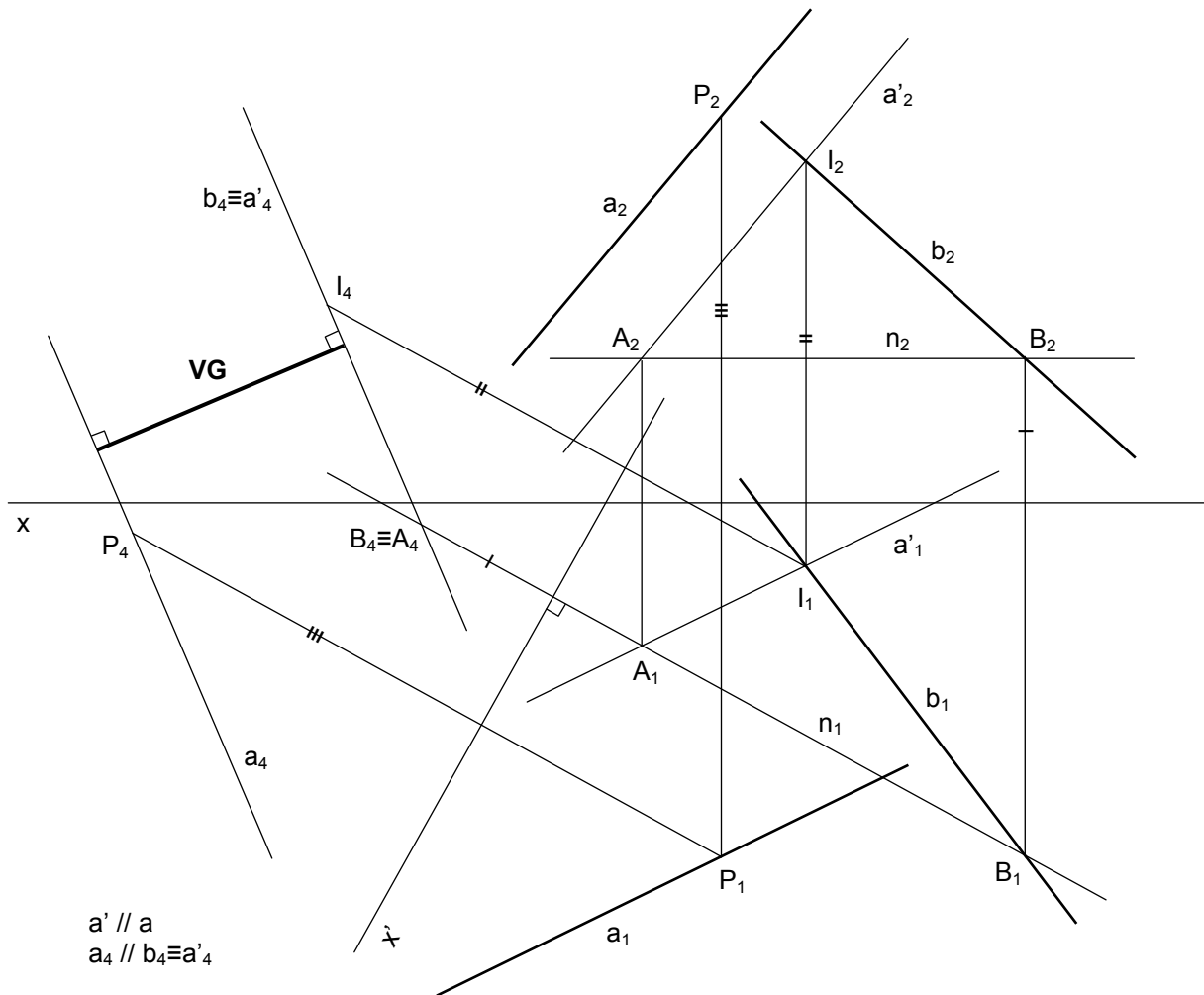
Distâncias de resolução direta entre retas enviesadas

Nos casos que aqui se apresentam é possível encontrar diretamente a VG da distância entre as retas numa das suas projeções. As VGs estão indicadas entre os pontos das retas que se situam mais próximos, apesar de não estares nomeados, excetuando a última situação.

No caso do lado, que envolve retas de perfil, também se pode indicar a VG diretamente, num sítio qualquer. Contudo, aqui optou-se também por indicá-la nos pontos das retas que estão mais próximos, A e B, determinados na projeção lateral.

Distância entre retas enviesadas

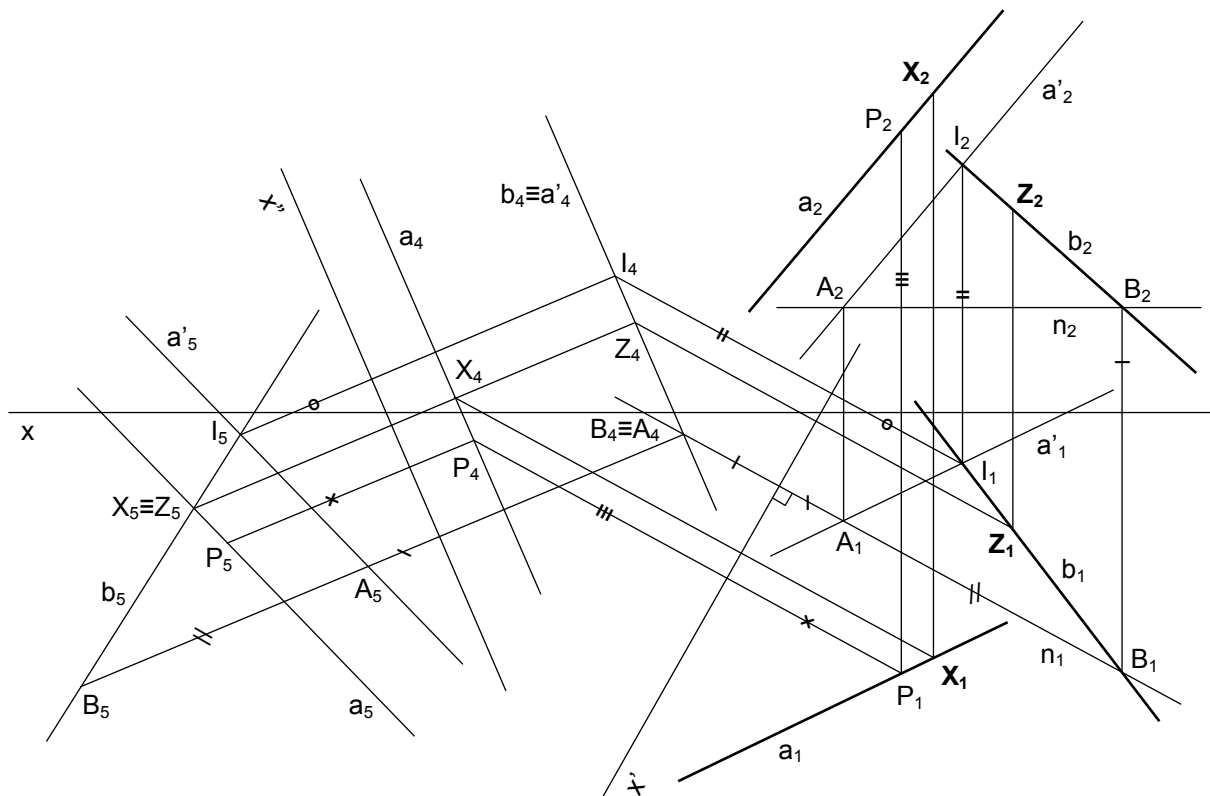
A determinação da distância entre duas retas enviesadas é praticamente igual à determinação da distância entre uma reta e um plano definido por retas, que se apresenta algumas páginas adiante, já que para a determinar é necessário cruzar com uma das retas uma reta paralela à outra.



Distância entre retas enviesadas

Para determinar a distância entre as retas a e b cruza-se aqui com b a reta a' paralela a a . Deste modo, fica um plano definido pelas retas a' e b , paralelo à reta a . A VG da distância entre a reta a e esse plano é, obviamente, a mesma que existe entre as duas retas. Para a determinar colocou-se aqui o plano na posição de topo, recorrendo à mudança do PFP. A reta horizontal n , do plano, dá a direção ao eixo x' , que lhe é perpendicular. Também se pode colocar o plano definido pelas retas na posição vertical, fazendo uma mudança do PHP. Para isso utiliza-se um eixo x' perpendicular a uma reta frontal do plano definido pelas retas.

Fazendo pequenas adaptações ao exercício da página anterior, sobretudo na dimensão do mesmo, acrescenta-se aqui a determinação do ponto de cada reta que fica mais próximo da outra.

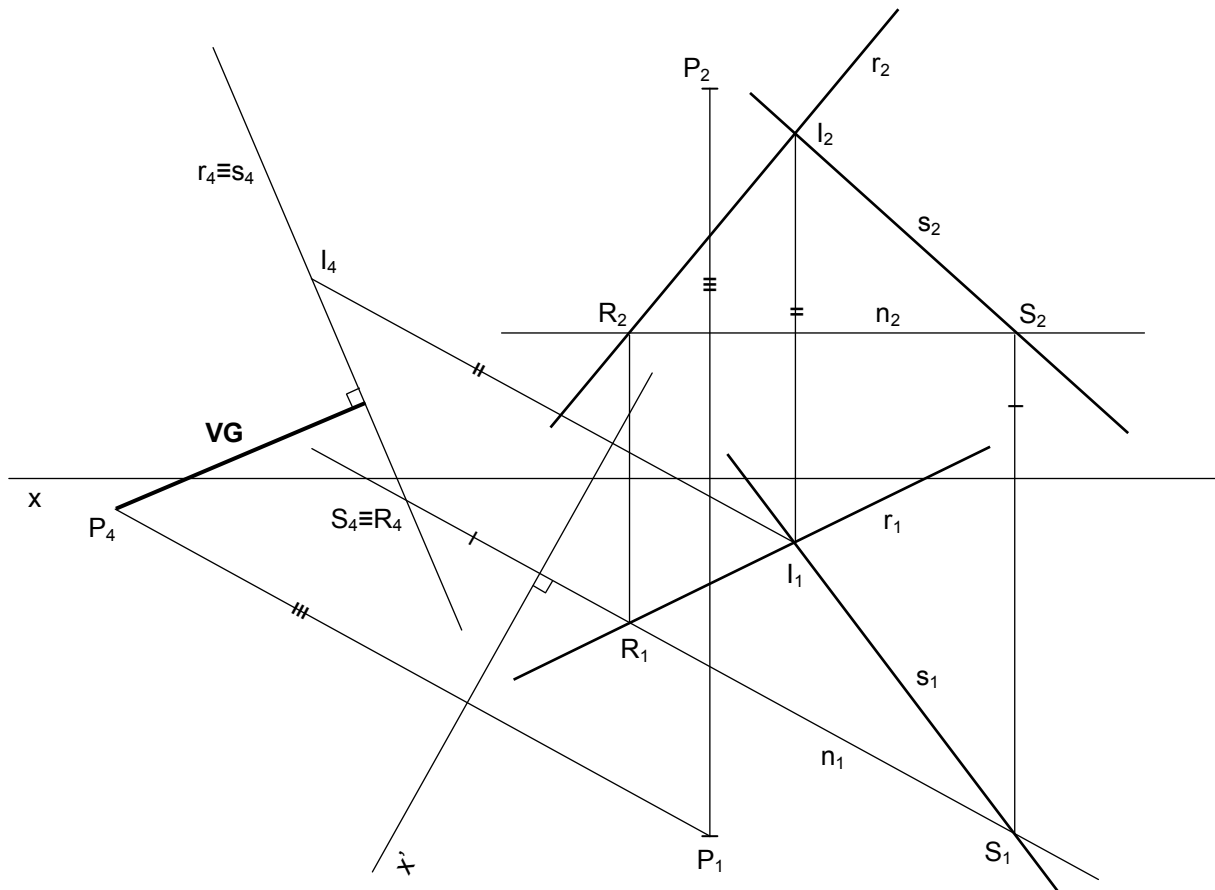


Pontos mais próximos entre duas retas enviesadas

Em relação ao exercício da página anterior, para determinar os pontos mais próximos entre duas retas enviesadas faz-se mais uma mudança de plano, de modo a colocar o plano definido pelas retas na posição horizontal. Esses pontos determinam-se no cruzamento das novas projeções das retas dadas, já que aí estão ambas horizontais. Fazendo o percurso inverso, até às projeções originais das retas, ficam representadas nelas as projeções desses pontos.

Distância entre um ponto e um plano definido por retas

Podem adaptar-se a esta situação os processos que se mostram na determinação da distância entre uma ponto e um plano definido pelos traços. Contudo, estando o plano definido por retas, qualquer outro processo teria muito mais traçado do que aquele que aqui se adota.



Distância entre um ponto e um plano definido por retas

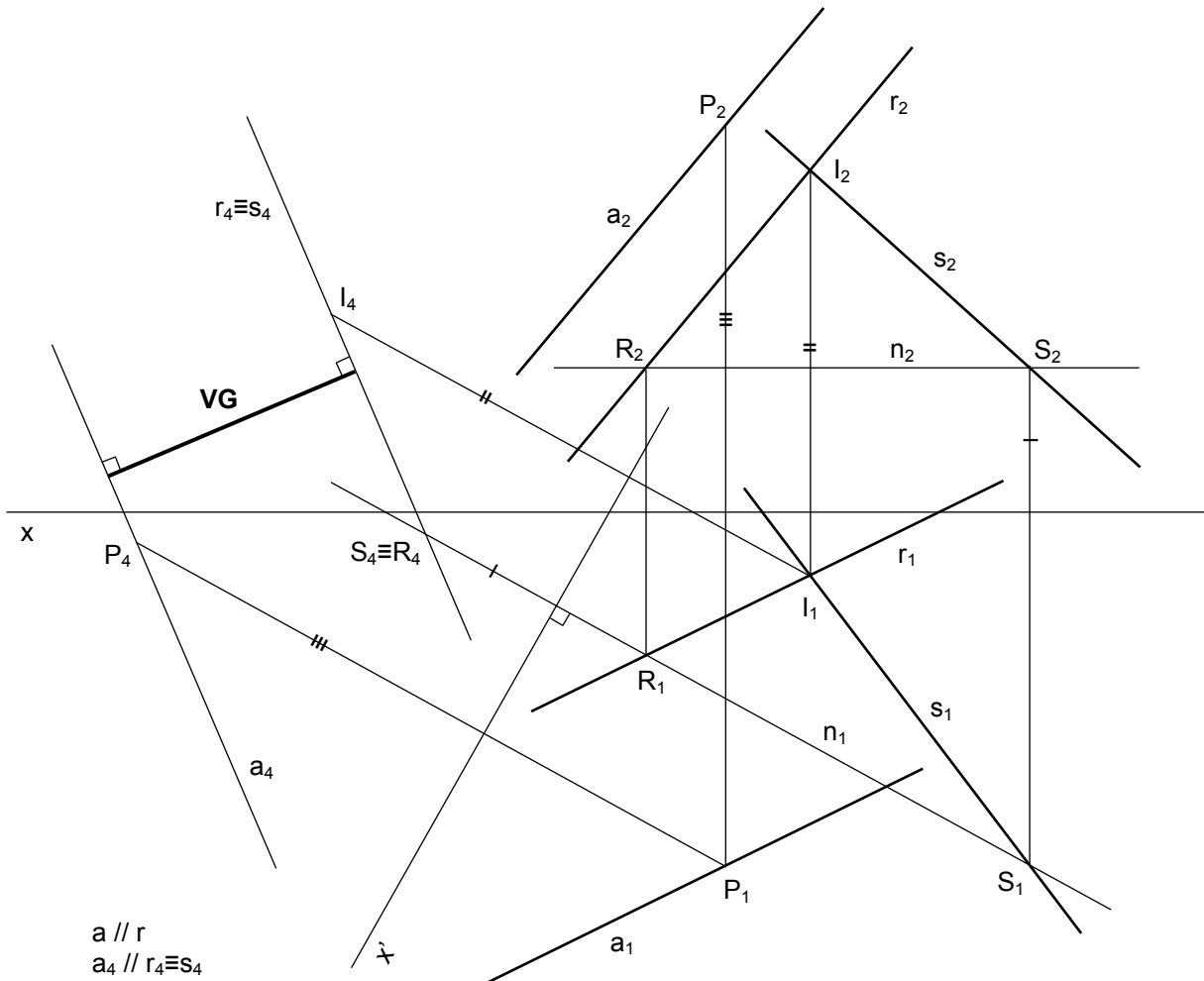
Temos aqui a determinação da VG da distância entre o ponto P e o plano definido pelas retas concorrentes r e s, através do método das mudanças de planos. A reta horizontal n, do plano, dá a direção do eixo x' , que lhe é perpendicular. Com a mudança do PFP o plano definido pelas retas fica de topo, daí as novas projeções das retas ficarem coincidentes. A VG encontra-se entre essas projeções e a nova projeção do ponto P.

Também se pode colocar o plano na posição vertical fazendo uma mudança do PHP. Para isso utiliza-se um eixo x' perpendicular a uma reta frontal do plano definido pelas retas.

Distância entre uma reta e um plano definido por retas

A distância entre uma reta e um plano é semelhante à distância entre um ponto e um plano, uma vez que, ao escolher um ponto da reta, se determina a distância entre ele o plano definido pelas retas.

Para facilmente se compararem as situações, a que aqui se apresenta é muito parecida com a da página anterior.



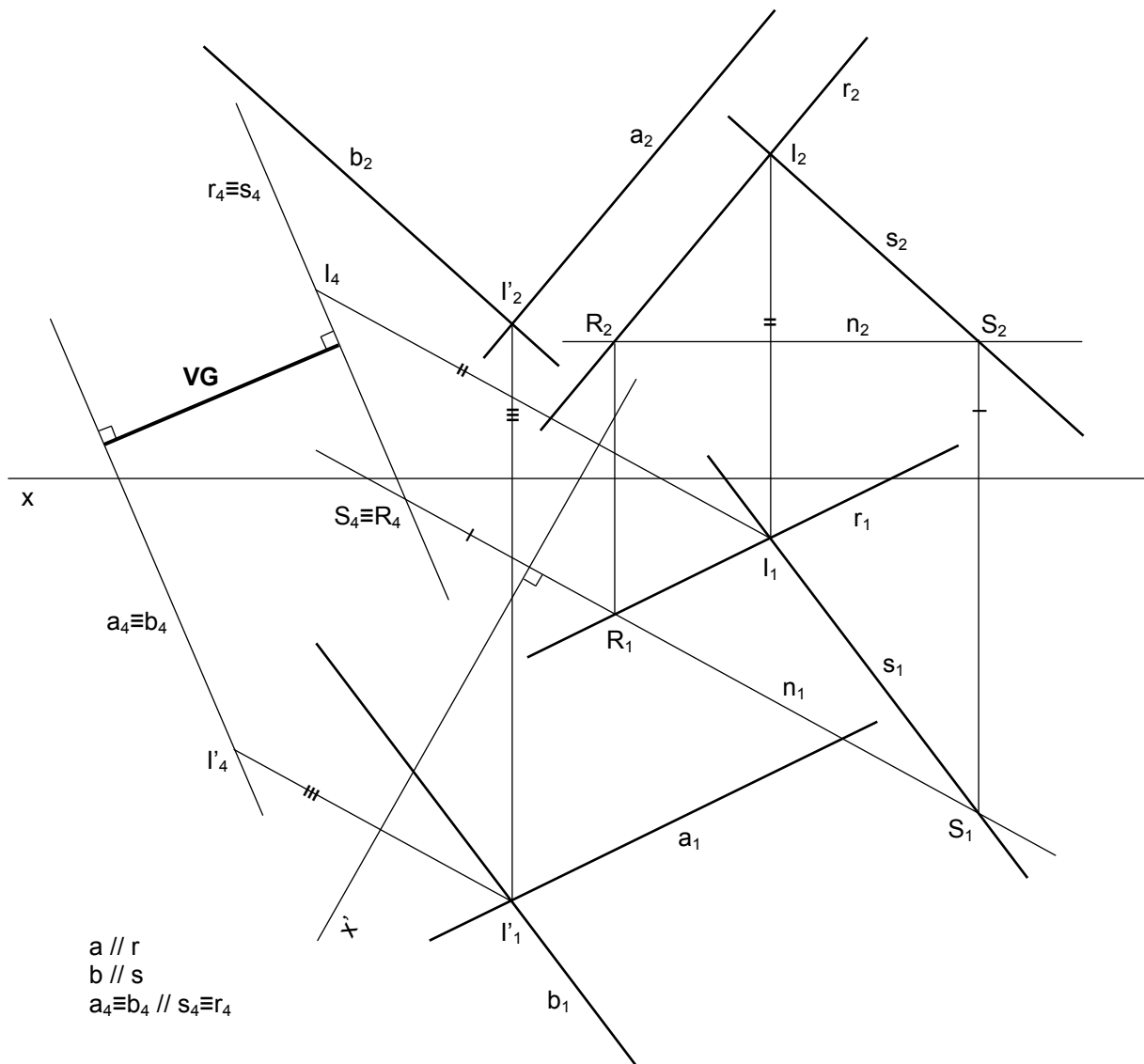
Distância entre uma reta e um plano definido por retas

Para que uma reta seja paralela a um plano tem de ser paralela a uma reta desse plano. Neste caso, a reta a é paralela à reta r , que define o plano juntamente com s . Depois de traçar uma reta horizontal para determinar a direção do eixo x' , com a mudança do PFP determinam-se as novas projeções das retas. As do plano ficam coincidentes, já que o plano definido pelas retas ficou de topo, a da outra fica paralela a essas. A VG encontra-se entre essas projeções.

Também se pode colocar o plano na posição vertical fazendo uma mudança do PHP. Para isso utiliza-se um eixo x' perpendicular a uma reta frontal do plano definido pelas retas.

Distância entre planos definidos por retas

A distância entre planos definidos por retas é também semelhante à distância entre um ponto e um plano, uma vez que a partir dum ponto desse plano determina-se a distância entre ele e o outro. Para facilmente se compararem as situações, a que aqui se apresenta é muito parecida com as das páginas anteriores.



Distância entre planos definidos por retas

Aqui temos um plano definido pelas retas r e s , concorrentes em l , e outro definido pelas retas a e b , concorrentes em l' , paralelas duas a duas. Depois de traçar uma reta horizontal para determinar a direção do eixo x' , com a mudança do PFP determinam-se as novas projeções das retas, que ficam coincidentes e paralelas às do outro plano, dado que ambos os planos ficam de topo. A VG encontra-se entre as novas projeções. Também se pode colocar os planos em posições verticais fazendo uma mudança do PHP. Para isso utiliza-se um eixo x' perpendicular a uma reta frontal de um dos planos.

Distâncias – Exercícios

Distâncias entre dois pontos

1. Determinar a VG da distância entre os seguintes pares de pontos:

- A(8;4;0) e B(5;1;3);
- C(2;1;2) e D(2;4;4).

2. Determinar a VG da distância entre os seguintes pares de pontos:

- E(8;1;-1) e F(6;5;-5);
- G(5;-2;2) e H(5;-5;5).

3. Determinar a VG da distância entre os seguintes pares de pontos:

- I(2;-1;1) e J(-6;2;-2);
- K(-3;2;5) e L(-3;5;1).

Distâncias entre um ponto e um plano

4. Determinar a VG da distância entre os seguintes pontos e plano:

- A(1;-2;-1); B(6;0;4);
- σ , de topo, que faz 35° ad e cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa.

5. Determinar a VG da distância entre os seguintes pontos e plano:

- C(-2;3;2); D(3;-1;1);
- β , vertical, que faz 50° ae e cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa.

Determinar também os pontos do plano que ficam mais próximos de cada ponto dado.

6. Determinar a VG da distância entre os seguintes pontos e plano:

- E(3;3;5); F(5;0;0);
- α , de rampa, cujos traços têm 3cm de afastamento e 5cm de cota.

7. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e plano:

- G(4;2;5);
- ρ , de rampa, cujos traços têm 3cm de afastamento e -6cm de cota.

Determinar também o ponto do plano que fica mais próximo do ponto dado.

8. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e plano:

- H(6;-1;5);
- π , passante, que contém P(4;3;-4).

Determinar também o ponto do plano que fica mais próximo do ponto dado.

9. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e planos:

- J(6;4;-1);
- $\beta_{1/3}$; $\beta_{2/4}$.

10. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e plano:

- K(1;4;3);
- θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x no ponto de abcissa nula, fazendo o seu traço frontal 40° ae.

11. Determinar a VG da distância entre os seguintes plano e ponto:

- θ , do exercício anterior;
- L, com 4cm de abcissa, cujas projecções se situam nos traços homónimos do plano;

12. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e plano:

- M(3;6;3);
- ψ , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo os traços frontal e horizontal 60° ad e 30° ae, respectivamente.

13. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e plano:

- N(5;-4;4);
- ψ , do exercício anterior.

Distâncias entre dois planos

14. Determinar a VG da distância entre os planos:

- β , que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 50° ad e 40° ad, respectivamente;
- δ , que cruza o eixo x no ponto de abcissa nula e é paralelo a β .

15. Determinar a VG da distância entre os planos:

- ω , que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 35° ae e 60° ad, respectivamente;
- α , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa e é paralelo a ω .

16. Determinar a VG da distância entre os planos:

- σ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 50° ad;
- ρ , que cruza o eixo x num ponto com -1cm de abcissa e é paralelo a σ .

17. Determinar a VG da distância entre os planos:

- σ , de rampa, cujos traços têm 2cm de cota e 3cm de afastamento;
- ψ , paralelo a σ , cujo traço frontal tem 5cm de cota.

18. Determinar a VG da distância entre os planos:

- θ , de rampa perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço frontal tem -2cm de cota;
- π , paralelo a σ , cujo traço horizontal tem 6cm de afastamento.

Distâncias entre dois planos (Continuação)

19. Determinar a VG da distância entre os planos:
- θ , de rampa, cujos traços têm 5cm de cota e -2cm de afastamento;
 - δ , passante, paralelo a θ .

Distâncias entre uma reta e um plano

20. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano de topo α , que faz 40° ad e cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa;
- recta frontal f, que tem traço em H(5;3;0) e é paralela ao plano.

21. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano vertical ω , que faz 55° ae e cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa;
- recta oblíqua r, que contém P(2;2;3) e é paralela ao $\beta_{1/3}$ e ao plano dado.

22. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano β , cujos traços têm 2cm de cota e 3cm de afastamento;
- reta de perfil p, paralela a β , cujo traço frontal é F(3;0;5).

23. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano β do exercício anterior;
- reta oblíqua s, que contém S(6;3;4), é paralela a β , fazendo a sua projeção horizontal 60° ae.

24. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano ρ , cujos traços têm 5cm de cota e -2cm de afastamento;
- reta fronto-horizontal h, com 3cm de cota, situada no $\beta_{1/3}$.

25. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano ρ do exercício anterior;
- reta de perfil passante, com 4cm de abcissa.

26. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano ψ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ad e 55° ad, respetivamente;
- reta frontal f, paralela ao plano, sendo H(5;4;0) o seu traço.

27. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano ψ do exercício anterior;
- reta de perfil p, paralela ao plano, sendo F(2;0;5) um dos seus traços.

28. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano ψ do exercício 26;
- reta oblíqua r, paralela ao plano e perpendicular ao seu traço horizontal, sendo H(3;6;0) um dos traços da reta.

29. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano oblíquo σ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 55° ad e 25° ae, respetivamente;
- reta horizontal, paralela a σ , cujo traço é F(-4;0;3).

30. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano σ do exercício anterior;
- reta de perfil p, paralela ao plano, sendo H(7;5;0) um dos seus traços.

31. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano π , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 50° ae;
- reta r, situada no $\beta_{2/4}$ e paralela a π , sendo passante num ponto com -4cm de abcissa.

Distâncias que envolvem planos definidos por retas ou pontos

32. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- ponto P(2;2;6);
- plano θ , passante, definido pela recta s, que contém o ponto L(3;3;1,5) e é passante no ponto M, com 6cm de abcissa.

33. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- ponto R(-2;5;7);
- plano δ , definido pelas retas paralelas a e b, contendo respetivamente os pontos A(1;3;3) e B(4;5;3), fazendo as suas projeções frontais e horizontais 60° ae e 30° ad, respetivamente.

34. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano α , definido pelos pontos A(0;4;1), B(-3;2;5) e C(-5;8;3);
- ponto P(3;6;4).

35. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano α do exercício anterior;
- ponto R(-4;0;0).

36. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano α do exercício 34;
- reta m, paralela à reta definida pelos pontos A e B, sendo H(6;3;0) o seu traço horizontal.

Distâncias que envolvem planos definidos por retas ou pontos (Continuação)

37. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- ponto $P(-2;3;5)$;
- plano ρ , definido por d_ρ , que contém $D(4;1;4)$, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 55° ae e 65° ad, respetivamente.

38. Determinar a VG da distância entre os seguintes elementos:

- plano ψ , definido por i_ψ , que contém $R(-1;1;4)$, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 55° ae e 65° ad, respetivamente;
- reta r , que tem traço frontal em $F(4;0;3)$.

Distâncias entre um ponto e uma reta

39. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $P(0;5;2)$;
- f , frontal que faz 35° ad e contém $A(-2;2;7)$.

40. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $Q(1;2;-2)$;
- n , horizontal que faz 50° ad e tem $F(-4;0;2)$ como traço.

Indicar também o ponto N , da reta, que fica mais próximo do ponto Q .

41. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $R(4;2;6)$;
- a , fronto-horizontal com -2 cm de afastamento e 4 cm de cota.

Indicar também o ponto A , da reta, que fica mais próximo do ponto R .

42. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $S(3;4;1,5)$;
- p , reta de perfil passante que contém $P(3;6;3)$.

Indicar também o ponto L , da reta, que fica mais próximo do ponto S .

43. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $T(2;3;0)$;
- q , de perfil, cujos traços são $H(5;5;0)$ e $F(5;0;3)$.

Indicar também o ponto Q , da reta, que fica mais próximo do ponto T .

44. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $K(-1;2;2)$;
- s , reta que contém $U(-3;4;6)$, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 30° ad e 45° ad, respetivamente.

Indicar também o ponto S , da reta, que fica mais próximo do ponto K .

45. Determinar a VG da distância entre os seguintes ponto e reta:

- $Y(3;1;4)$;
- reta s do exercício anterior.

Indicar também o ponto A , da reta, que fica mais próximo do ponto Y .

Distâncias entre duas retas

46. Determinar a VG da distância entre as retas:

- n , horizontal, que contém $A(2;3;0)$ e faz 40° ae;
- m , que contém $B(-2;3;2)$ e é paralela a n ,

47. Determinar a VG da distância entre as retas:

- f , frontal, que contém $C(2;-1;1)$ e faz 50° ad;
- g , que contém $D(2;-4;4)$ e é paralela a f .

48. Determinar a VG da distância entre as retas:

- a , fronto-horizontal, que contém $A(4;-2;2)$;
- b , fronto-horizontal, que contém $B(2;3;4)$.

49. Determinar a VG da distância entre as retas:

- c , fronto-horizontal, que contém $C(2;3;0)$;
- d , fronto-horizontal, que contém $D(4;3;-3)$.

50. Determinar a VG da distância entre as retas:

- p , de perfil, que contém os pontos $A(5;-1,5;6)$ e $B(5;3;5;2)$;
- q , passante, com 4 cm de abcissa e paralela a p .

Indicar também os pontos de cada reta que ficam mais próximos da outra.

51. Determinar a VG da distância entre as retas:

- r , que contém $A(2;4;3)$ e $B(0;1;5)$;
- s , que contém $C(-1;2;2)$ e é paralela a r .

52. Determinar a VG da distância entre as retas:

- r , do exercício anterior;
- z , que contém $D(2;1;3)$ e é paralela a r .

53. Determinar a VG da distância entre as retas:

- a , do $\beta_{2/4}$, passante num ponto com 3 cm de abcissa, fazendo a sua projeção frontal 40° ad;
- b , passante num ponto com -1 cm de abcissa e paralela a a .

54. Determinar a VG da distância entre as retas:

- r , que contém $A(4;1;4)$ e $B(8;4;1)$;
- s , que contém $C(1;5;5)$ e $D(6;-2;7)$.