

5

INTERSEÇÕES

O estudo das Interseções é de grande importância para o aprofundamento dos capítulos anteriores. Além disso, os assuntos aqui tratados surgem também aplicados aos capítulos que se seguem a este.

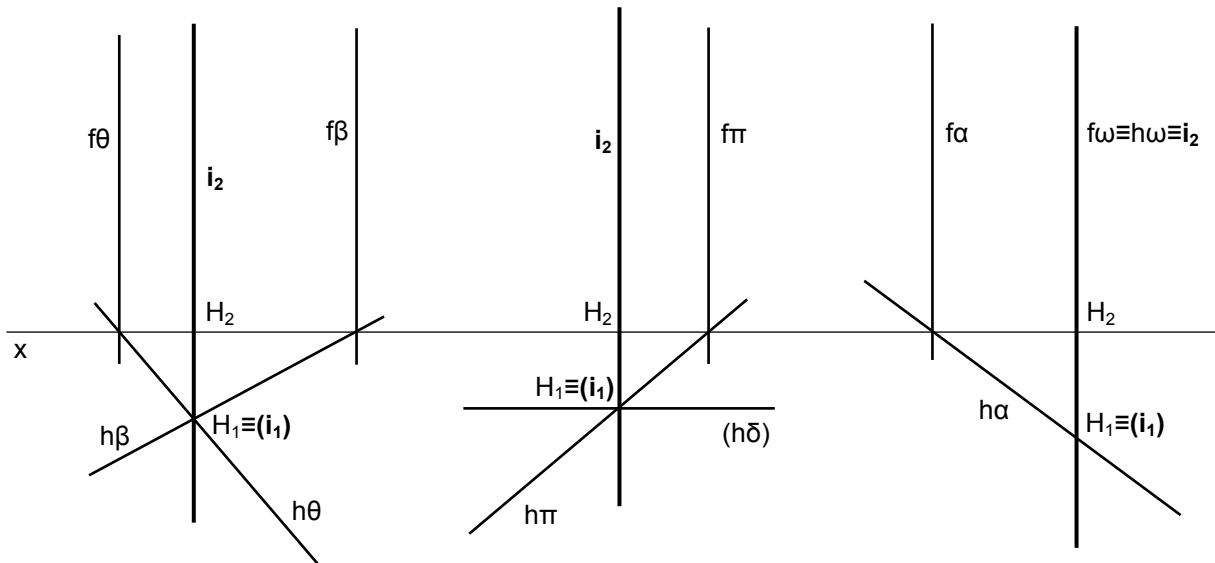
Este capítulo engloba interseções de planos com planos e de retas com planos.

Sumário:

2. Interseção de planos projetantes do mesmo género
3. Interseção de planos projetantes de género contrário
4. Interseção do plano oblíquo com planos projetantes
5. Interseção do plano oblíquo com o plano de rampa
6. Interseção entre planos oblíquos
7. Interseção do plano de rampa com planos projetantes
8. Interseção entre planos de rampa
9. Interseção do plano passante com planos projetantes
10. Interseção do plano passante com planos não projetantes
11. Interseções que envolvem planos perpendiculares ao $\beta_{2/4}$
12. Interseção de planos cujos traços se cruzam apenas num ponto
13. Interseção de planos cujos traços se cruzam ambos fora do papel
- 14 e 15. Interseção entre três planos
16. Interseção entre retas e planos projetantes
17. Interseção entre uma reta e um plano oblíquo
18. Interseção entre uma reta e um plano de rampa
- 19 e 20. Interseção da reta de perfil com planos diversos
- 21 e 22. Interseção entre uma reta e um plano definido por retas
23. Interseção da reta de perfil com planos definidos por retas
24. Interseção de planos projetantes com planos definidos por retas
25. Interseção do plano oblíquo com planos definidos por retas
26. Interseção do plano de rampa com planos definidos por retas
- 27, 28 e 29. Interseção entre planos definidos por retas
- 30, 31, 32 e 33. Exercícios

Intersecção de planos projetantes do mesmo género

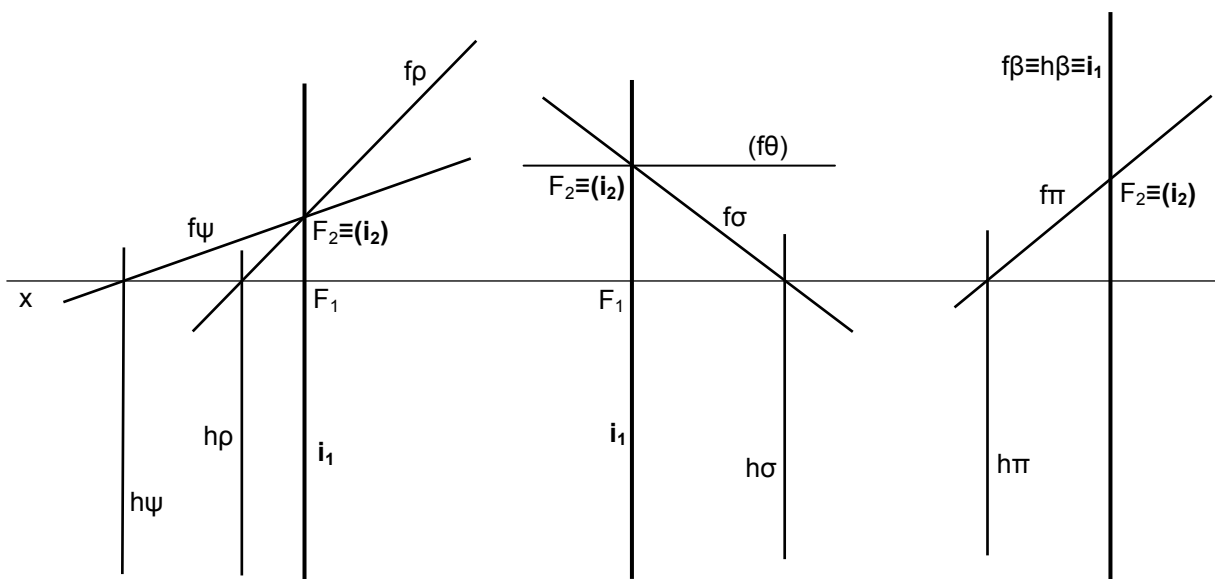
Mostra-se aqui a intersecção entre planos projetantes horizontais e entre planos projetantes frontais, de onde resulta uma reta projetante do mesmo género.



Intersecção entre planos projetantes horizontais

Quando se intersectam dois planos projetantes horizontais resulta uma reta projetante horizontal, ou seja, uma reta vertical.

Neste grupo integra-se também o plano de perfil e o plano frontal, que não surgem no traçado.



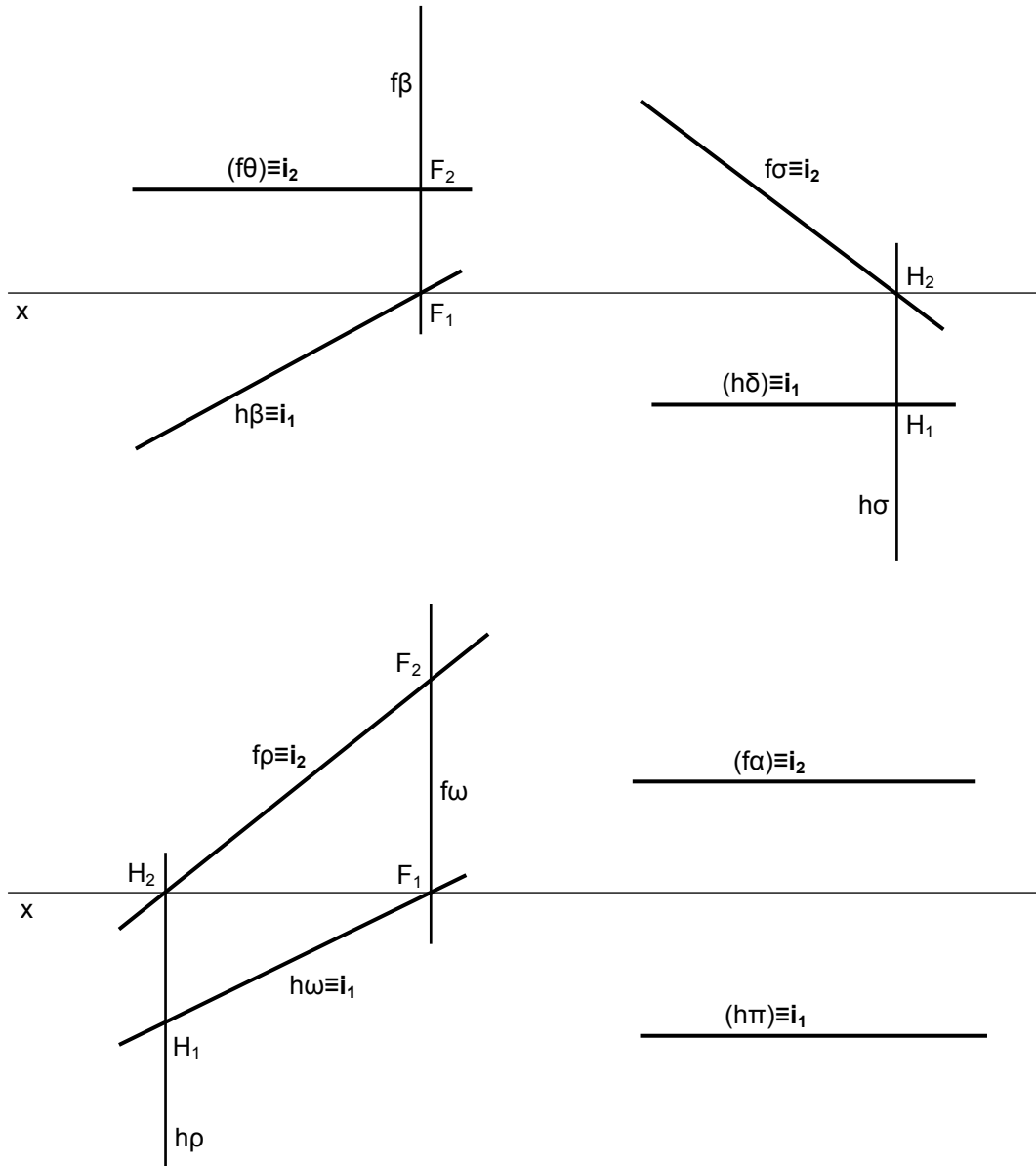
Intersecção entre planos projetantes frontais

Quando se intersectam dois planos projetantes frontais resulta uma reta projetante frontal, ou seja, uma reta de topo.

Neste grupo integra-se ainda o plano de perfil e o plano horizontal, que não surgem no traçado.

Interseção de planos projetantes de género contrário

Aqui mostra-se a interseção entre planos projetantes de género oposto, ou seja, de um plano projetante horizontal com outro projetante frontal.

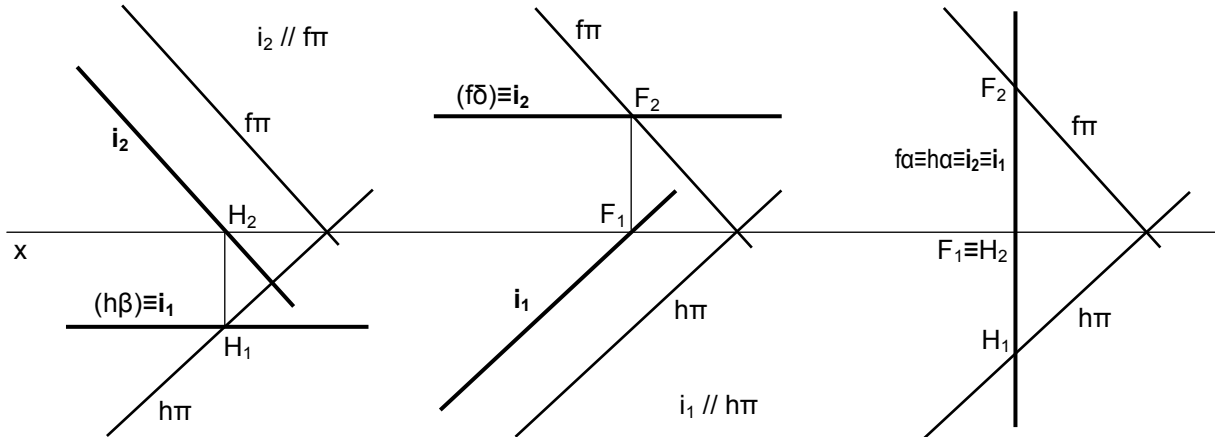


Interseção entre planos projetantes de género contrário

Quando se intersectam dois planos projetantes de género contrário acontece que as projeções da reta de interseção vão coincidir com os traços sobre os quais os planos são projetantes. Apresentam-se aqui os traços das retas mas pode-se prescindir deles.

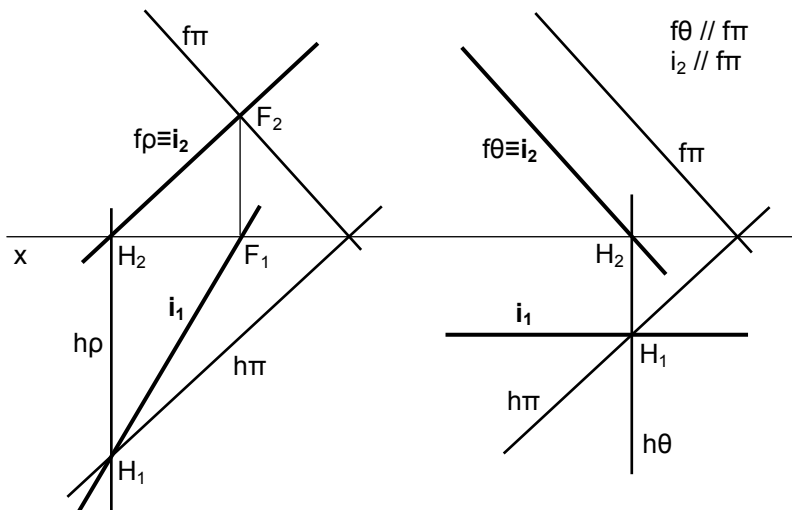
Interseção do plano oblíquo com planos projetantes

Veremos aqui as várias hipóteses de conjugar o plano oblíquo com os planos projetantes, e que tipo de retas daí resultam.



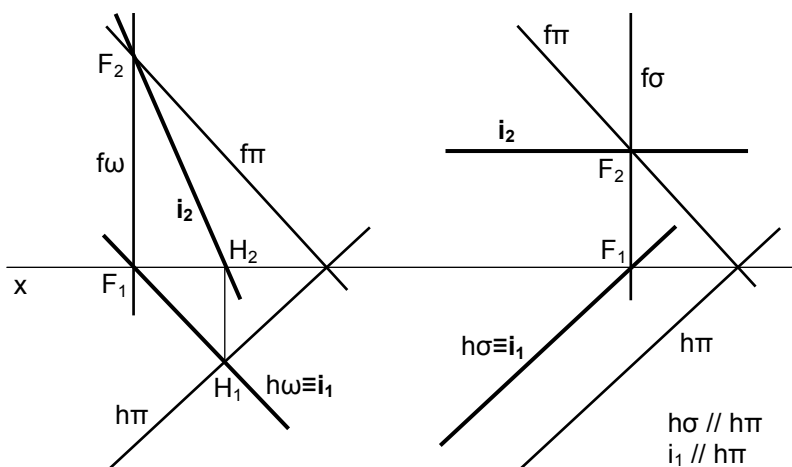
Interseção do plano oblíquo com os planos frontal, horizontal e de perfil

Da interseção de um plano oblíquo com um plano frontal resulta uma reta frontal, com um plano horizontal resulta uma reta horizontal, ambas paralelas ao traço homónimo do plano oblíquo. Da interseção do plano oblíquo com o plano de perfil resulta uma reta de perfil.



Interseção do plano oblíquo com o plano de topo

A interseção entre estes dois planos pode dar origem a duas situações diferentes. Quando ambos os traços se cruzam resulta uma reta oblíqua; quando os traços frontais são paralelos resulta uma reta frontal.

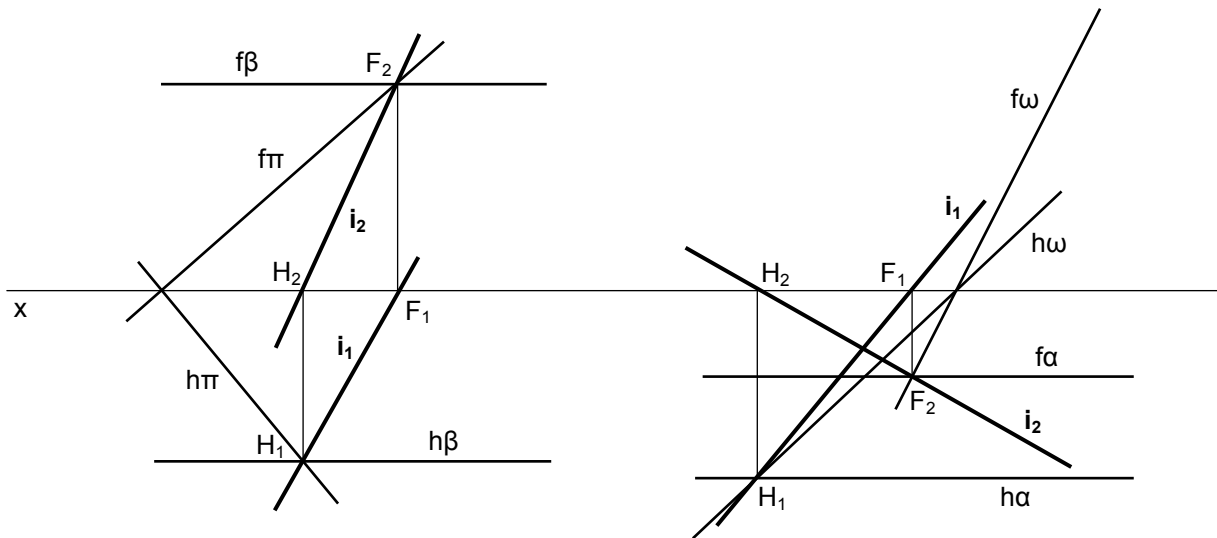


Interseção do plano oblíquo com o plano vertical

A interseção entre estes dois planos pode dar origem a duas situações diferentes. Quando ambos os traços se cruzam resulta uma reta oblíqua; quando os traços horizontais são paralelos resulta uma reta horizontal.

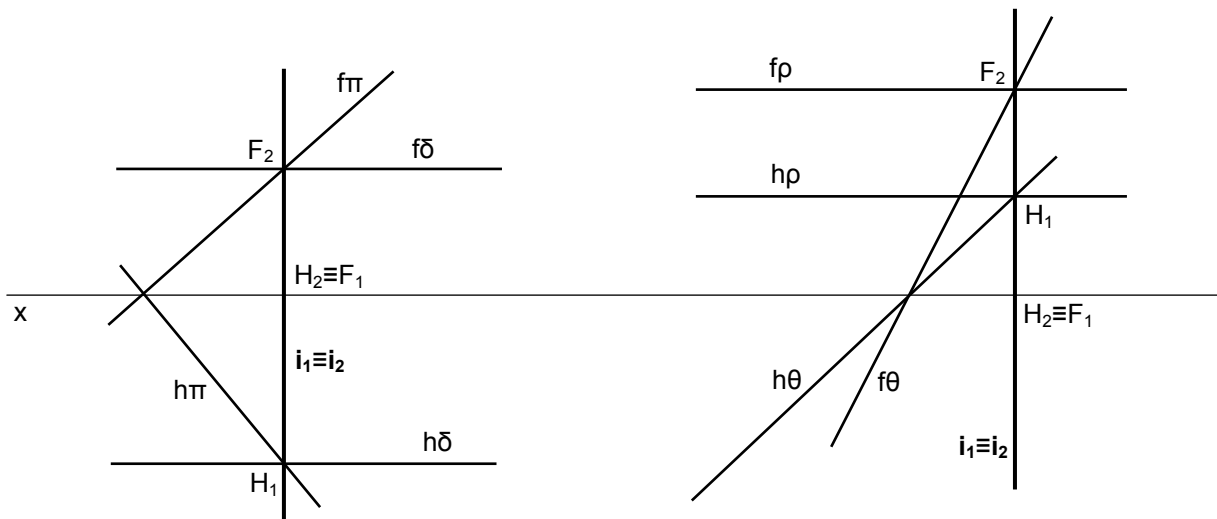
Interseção do plano oblíquo com o plano de rampa

Mostra-se aqui a interseção entre um plano oblíquo e um plano de rampa, o que pode dar origem a dois tipos de retas.



Intersecção do plano oblíquo com o plano de rampa, resultando uma reta oblíqua

Quando os traços da reta de intersecção têm diferentes abscissas, essa reta será oblíqua. Mostram-se dois exemplos dessa situação.

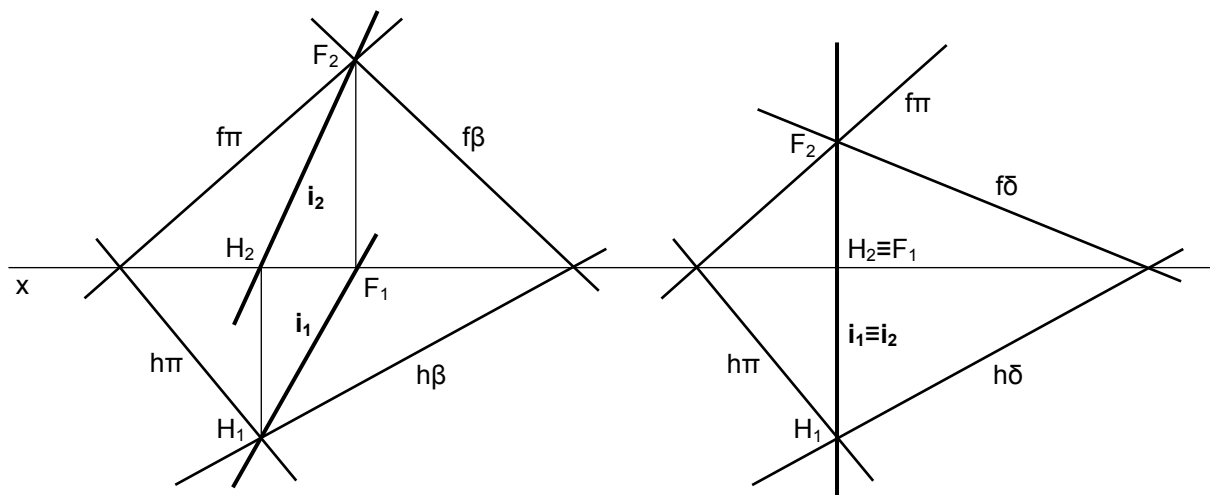


Intersecção do plano oblíquo com o plano de rampa, resultando uma reta de perfil

Quando os traços da reta de intersecção têm abscissas iguais, essa reta será de perfil. Mostram-se dois exemplos dessa situação.

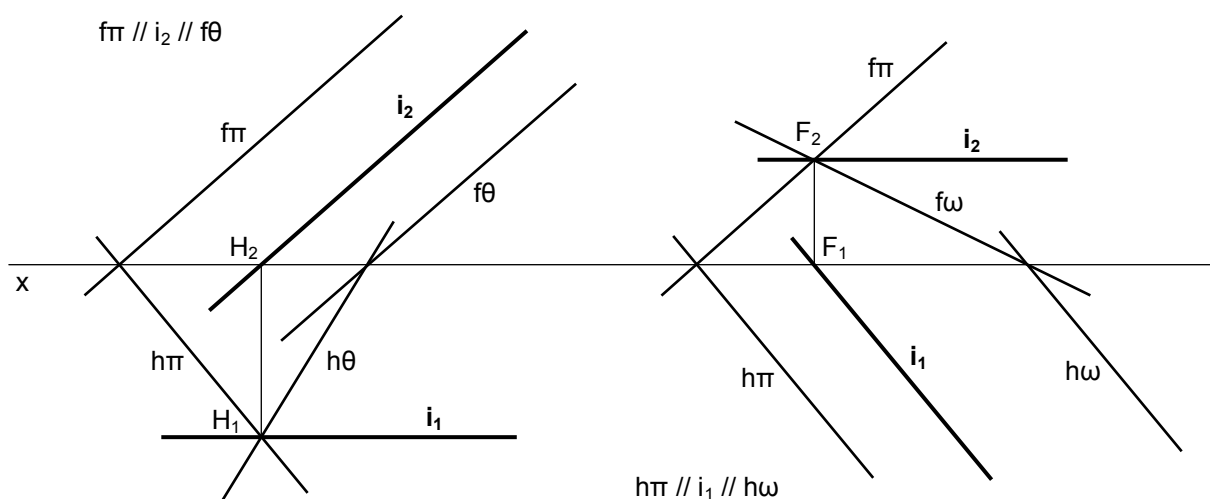
Interseção entre planos oblíquos

A interseção entre dois planos oblíquos apresenta quatro possibilidades, cada uma correspondendo a um tipo de reta das que o plano pode conter.



Interseção entre dois planos oblíquos, resultando retas com dois traços

Os traços dos planos oblíquos podem cruzar-se de modo a que os traços da reta de interseção tenham abscissas diferentes ou iguais, dando origem a uma reta oblíqua ou de perfil, respetivamente.

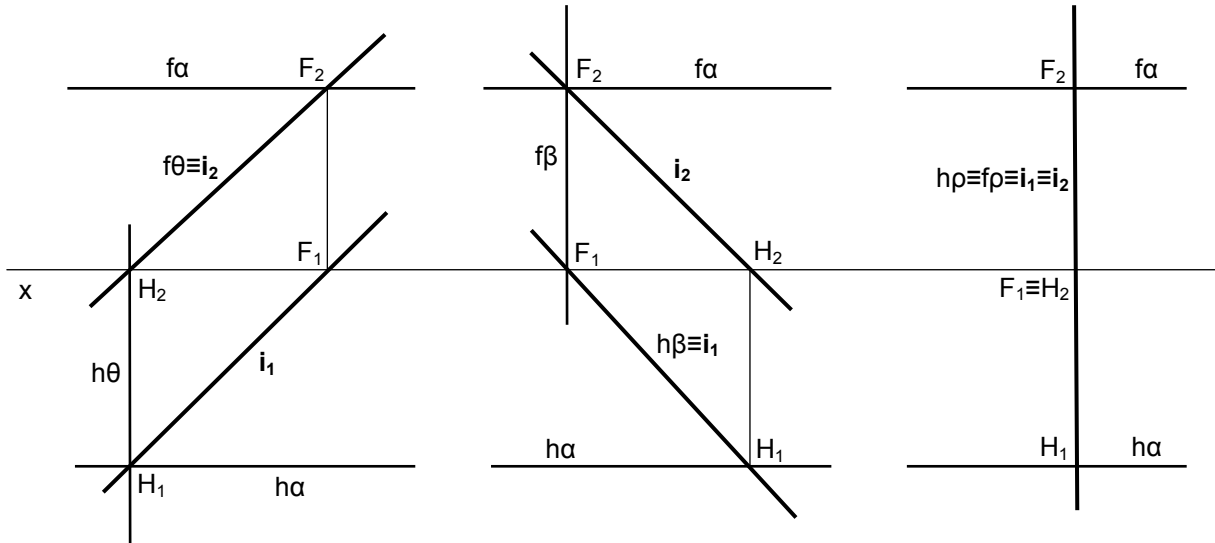


Interseção entre dois planos oblíquos, resultando retas com um traço

Se os traços frontais dos planos forem paralelos entre si resulta uma reta frontal paralela aos traços homónimos dos planos. Sendo paralelos os traços horizontais resulta uma reta horizontal paralela a esses traços.

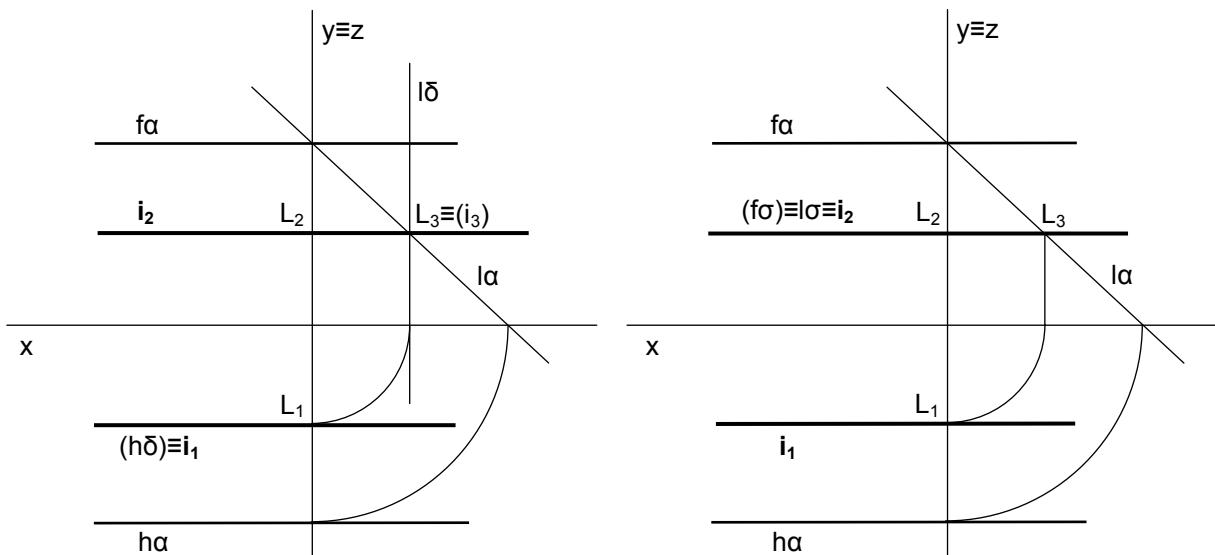
Interseção do plano de rampa com planos projetantes

Apresentam-se aqui interseções entre um plano de rampa e cada um dos planos projetantes.



Interseção do plano de rampa com os planos de topo, vertical e de perfil

Para a determinação destas interseções basta determinar os traços da reta de intersecção e uni-los. Devido ao facto de um dos planos ser projetante, existe coincidência entre uma projeção da reta e um traço do plano, os dois no caso do plano de perfil.



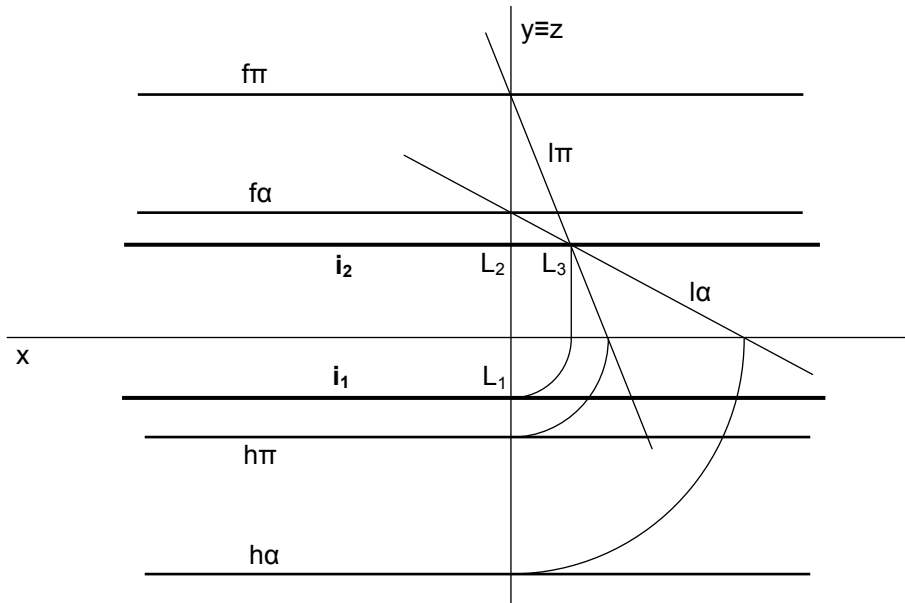
Interseção do plano de rampa com os planos frontal e horizontal

Da interseção do plano de rampa com os planos frontal e horizontal resulta uma reta fronto-horizontal. Para a determinar recorre-se aqui aos traços laterais dos planos, uma vez que o ponto onde se cruzam é o traço lateral da reta.

Estes casos podem resolver-se recorrendo a um plano auxiliar, como se mostra na página seguinte.

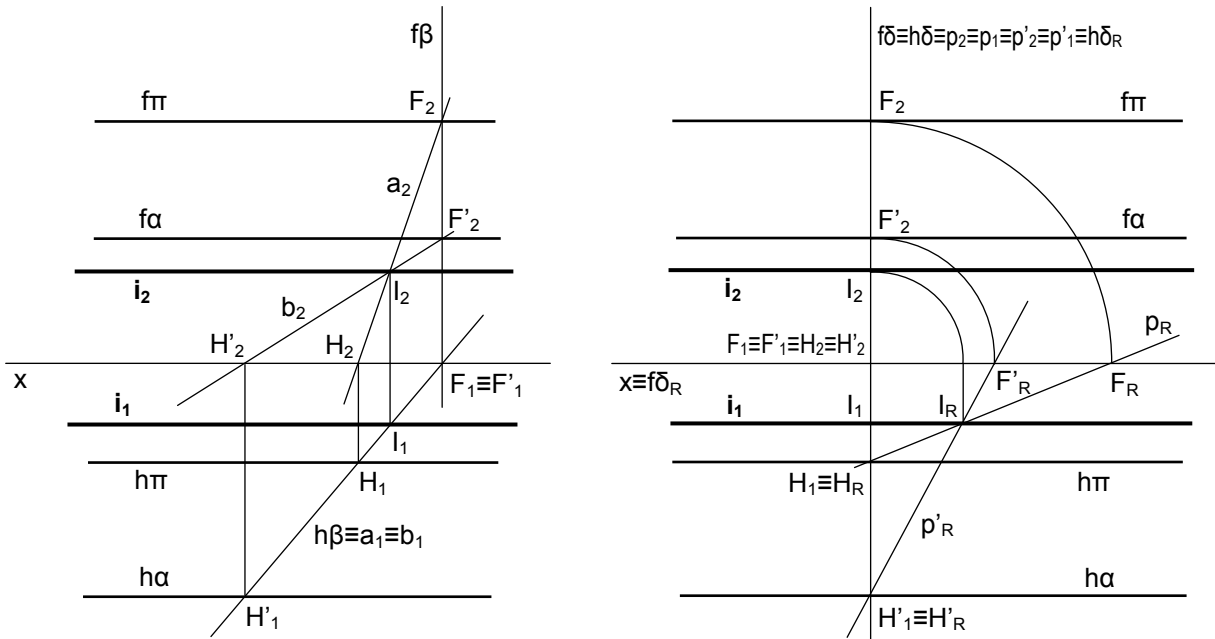
Interseções entre planos de rampa

Da interseção entre dois planos de rampa resulta uma reta fronto-horizontal. Como os traços do plano de rampa são paralelos não se consegue determinar diretamente a reta de interseção. Apresentam-se aqui três maneiras de resolver a mesma situação.



Interseção entre planos de rampa, recorrendo aos traços laterais

Os traços principais dos planos de rampa são paralelos, mas os seus traços laterais cruzam-se. O ponto desse cruzamento é o ponto L, traço lateral da reta de interseção.

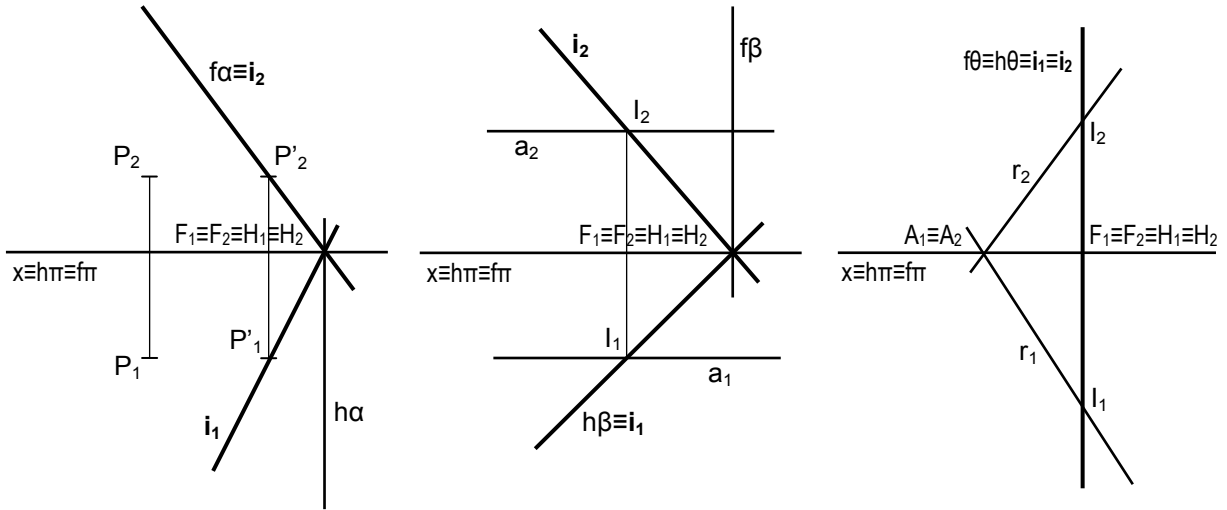


Interseção entre planos de rampa, recorrendo a planos auxiliares

Utilizando um plano auxiliar (aqui um vertical e um de perfil) cujos traços intersetem os dos planos de rampa, obtém-se também a reta de interseção. Começa-se por determinar as retas de interseção desse plano com os de rampa (retas a e b na primeira situação, retas p e p' na segunda). Pelo ponto l, onde essas retas se cruzam, passa a reta de interseção i. De notar que, na segunda situação, se rebateu o plano de perfil para se determinar esse ponto. Normalmente utilizam-se planos projetantes, mas também se poderia utilizar um plano oblíquo.

Interseção do plano passante com planos projetantes

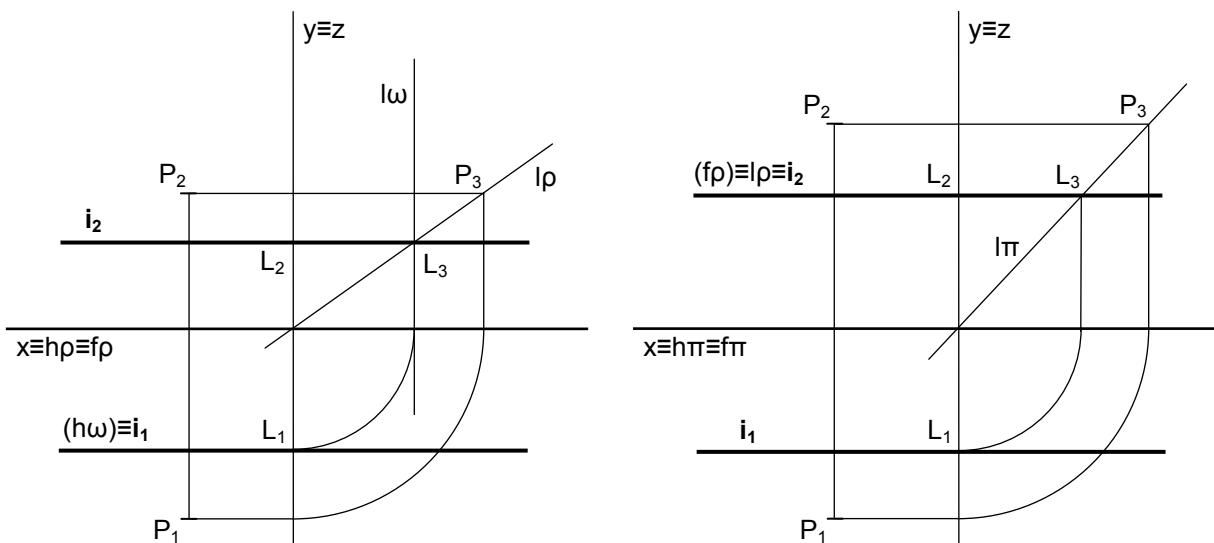
O plano passante é um plano de rampa com características específicas. O facto de esse plano se apresentar definido pelo eixo x e por um ponto ou uma reta faz com que trabalhar com ele obrigue a alguns procedimentos peculiares.



Interseção do plano passante com os planos de topo, vertical e de perfil

Na primeira situação coloca-se o ponto P' , idêntico ao ponto P define o plano passante, no plano de topo; por esse ponto passa a reta i . Na segunda situação é a reta fronto-horizontal a que ajuda a definir o plano passante; da sua interseção com o plano vertical resulta o ponto I , contido na reta i . Na terceira situação a reta oblíqua r , passante no ponto A , define o plano passante; ao cruzar-se com o plano de perfil temos o ponto I que, juntamente com os traços H e F , coincidentes, define a reta de interseção, que é de perfil. Como se pode verificar, todas as retas de interseção destes casos são passantes.

Um plano passante pode também estar definido por uma reta de perfil passante, situação essa que não se mostra aqui.



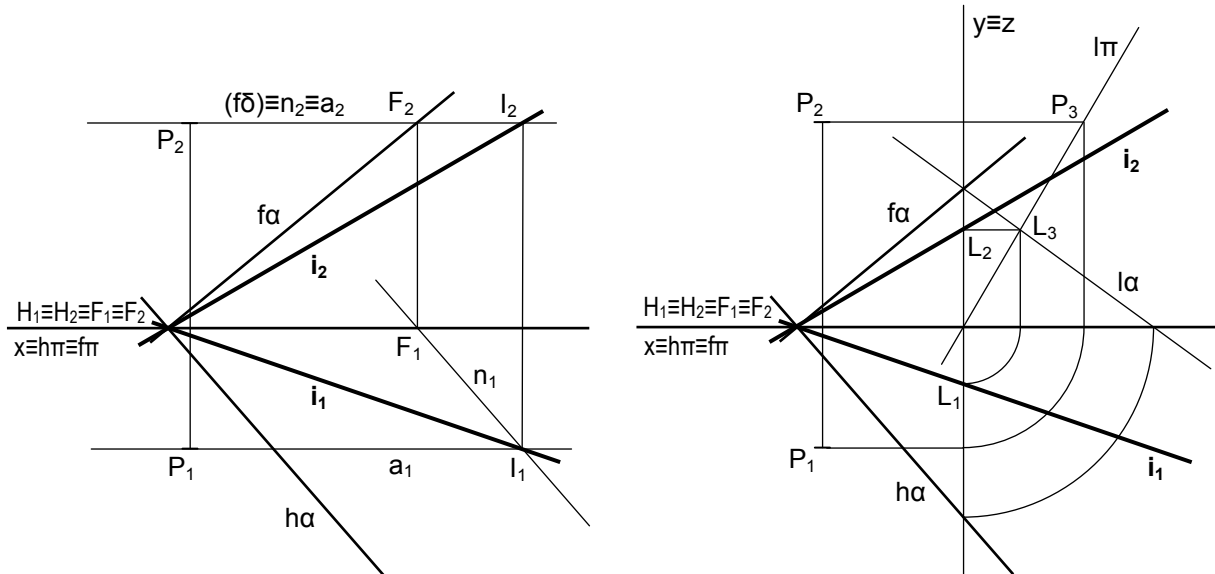
Interseção do plano passante com os planos horizontal e frontal

Aqui optou-se por mostrar o plano passante definido por um ponto, que é P , e recorreu-se ao cruzamento dos traços laterais, onde se encontra o ponto L , traço lateral da reta de interseção. Da interseção destes planos resulta uma reta fronto-horizontal.

Sendo o plano passante definido por uma reta pode-se escolher um ponto seu para determinar o traço lateral.

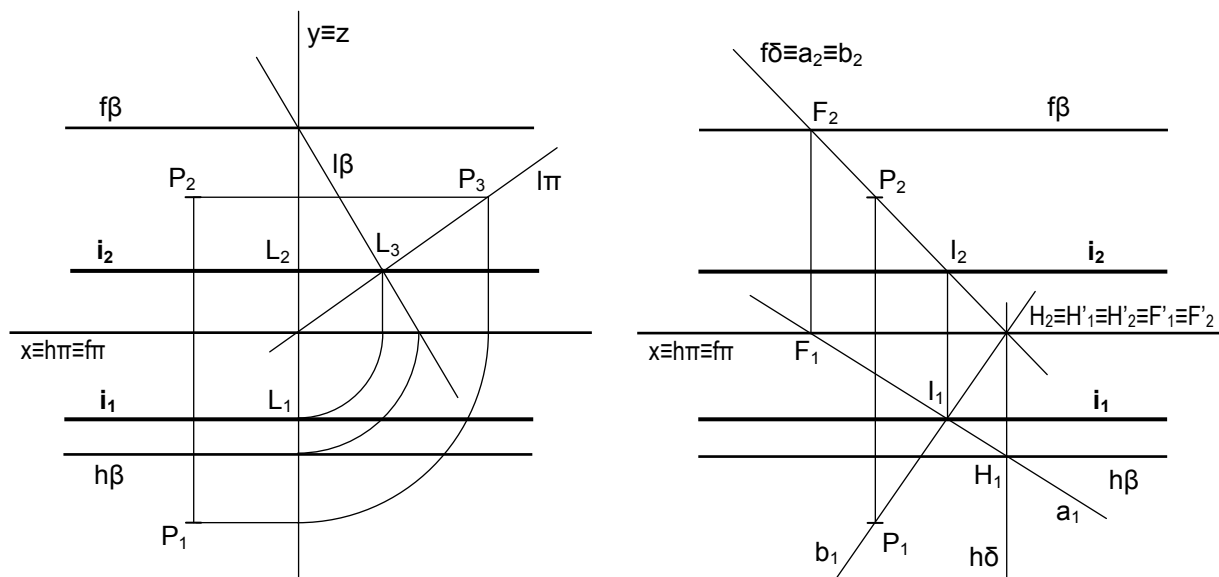
Interseção do plano passante com planos não projetantes

Apresentam-se aqui dois exercícios, cada um resolvido por dois processos diferentes; uma vez recorrendo a um plano projetante, a outra utilizando os traços laterais dos planos.



Interseção do plano passante com o plano oblíquo

À esquerda utiliza-se um plano auxiliar horizontal que cruza os planos dados nas retas a e n ; onde essas retas se cruzam surge o ponto I , contido na reta i . No segundo caso recorre-se aos traços laterais dos planos, que se cruzam no ponto L , traço lateral da reta i . Da intersecção entre estes planos resulta uma reta oblíqua passante.

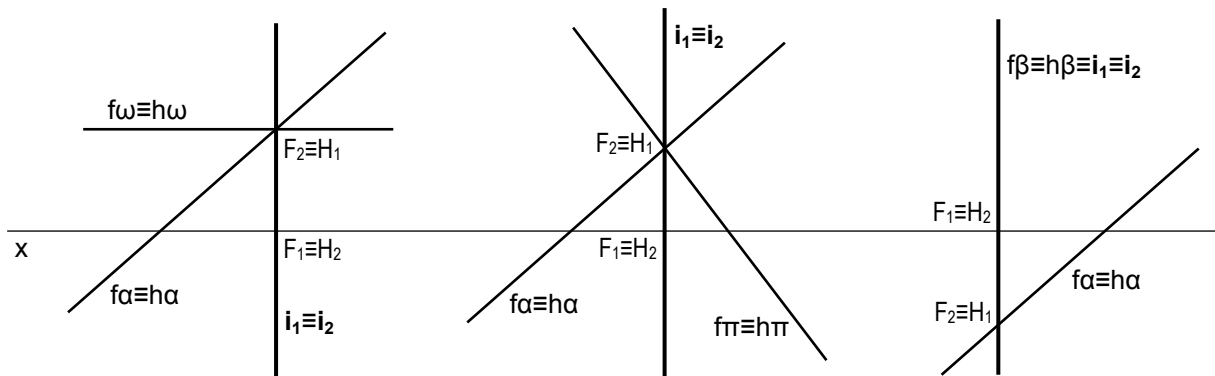


Interseção do plano passante com o plano de rampa

Também aqui se mostra a mesma situação resolvida de duas maneiras. No primeiro caso recorreu-se ao cruzamento dos traços laterais, onde se encontra o ponto L , traço lateral da reta de intersecção. No segundo utilizou-se um plano auxiliar de topo. As retas a e b , de intersecção desse plano com os planos dados, cruzam-se no ponto I , contido na reta i . Da intersecção entre os planos de rampa e passante resulta uma reta fronto-horizontal, bastando determinar um ponto.

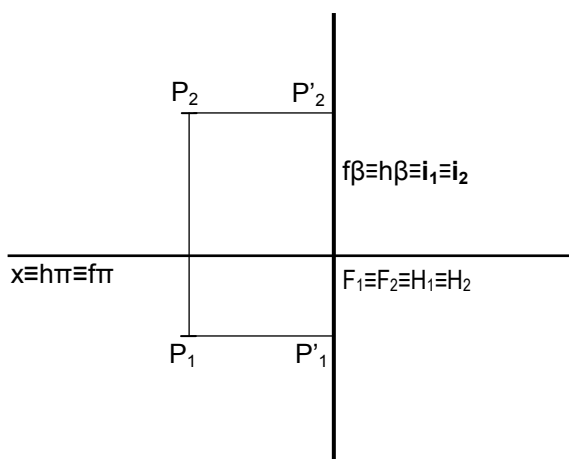
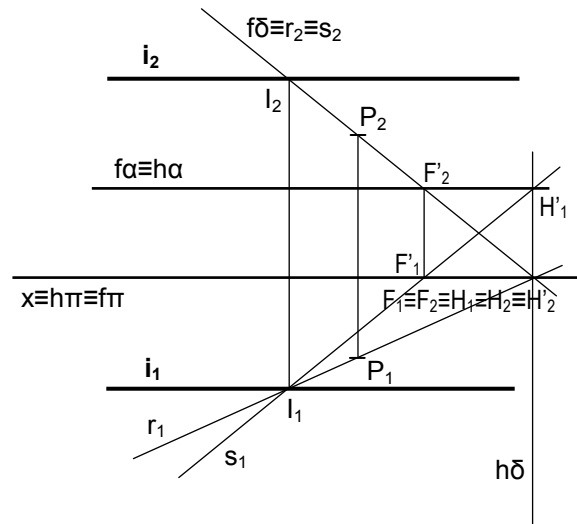
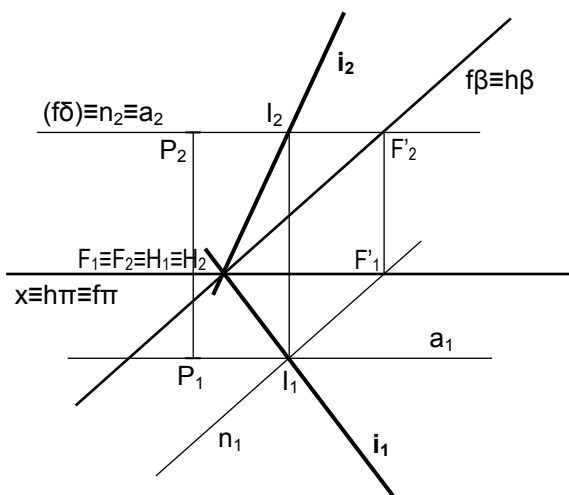
Interseções que envolvem planos perpendiculares ao $\beta_{2/4}$

Os primeiros casos aqui apresentados envolvem dois planos perpendiculares ao $\beta_{2/4}$; os restantes envolvem um plano passante e um plano perpendicular ao $\beta_{2/4}$.



Interseção entre planos perpendiculares ao $\beta_{2/4}$

A interseção de dois planos perpendiculares ao $\beta_{2/4}$ determina-se recorrendo aos traços da reta de interseção. Como se pode verificar, destas interseções resulta uma reta perpendicular ao $\beta_{2/4}$, ou seja, de perfil.



Interseção do plano passante com planos perpendiculares ao $\beta_{2/4}$

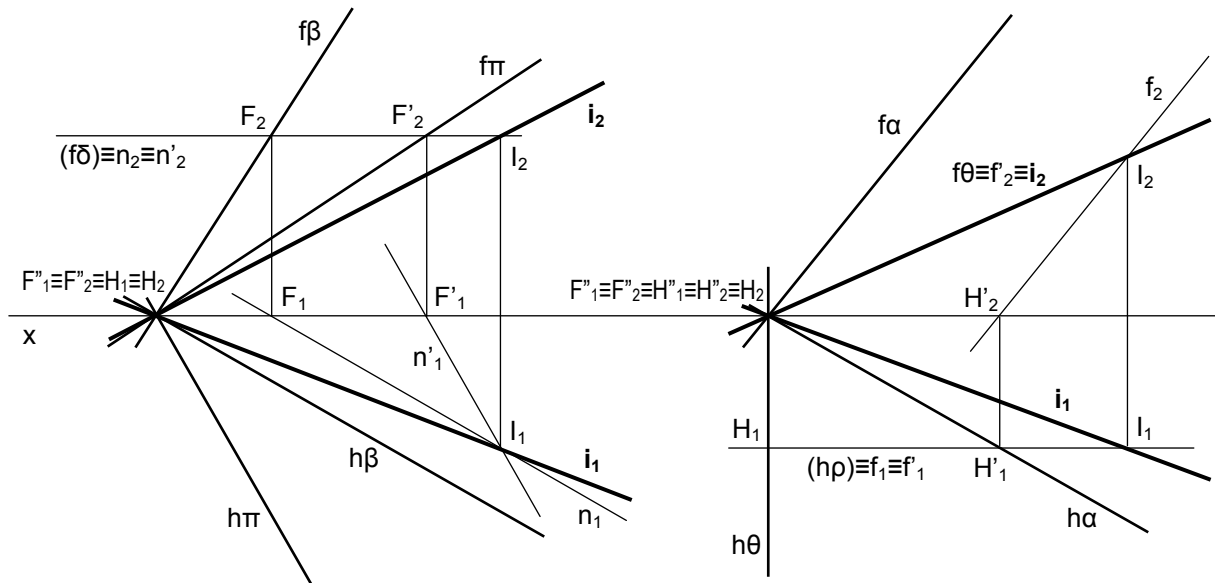
Nestas três situações, o plano passante está definido pelo ponto P e pelo eixo x.

No primeiro caso, com o plano oblíquo, recorreu-se a um plano auxiliar horizontal, que cruza os outros nas retas a e n. No segundo caso, com o plano de rampa, utilizou-se um plano auxiliar de topo, que cruza os outros nas retas r e s. Onde essas retas se cruzam surge o ponto I, contido na reta i.

No terceiro caso colocou-se o ponto P', idêntico a P (que define o plano passante), no plano de perfil. Esse ponto, juntamente com os traços H e F, definem a reta i.

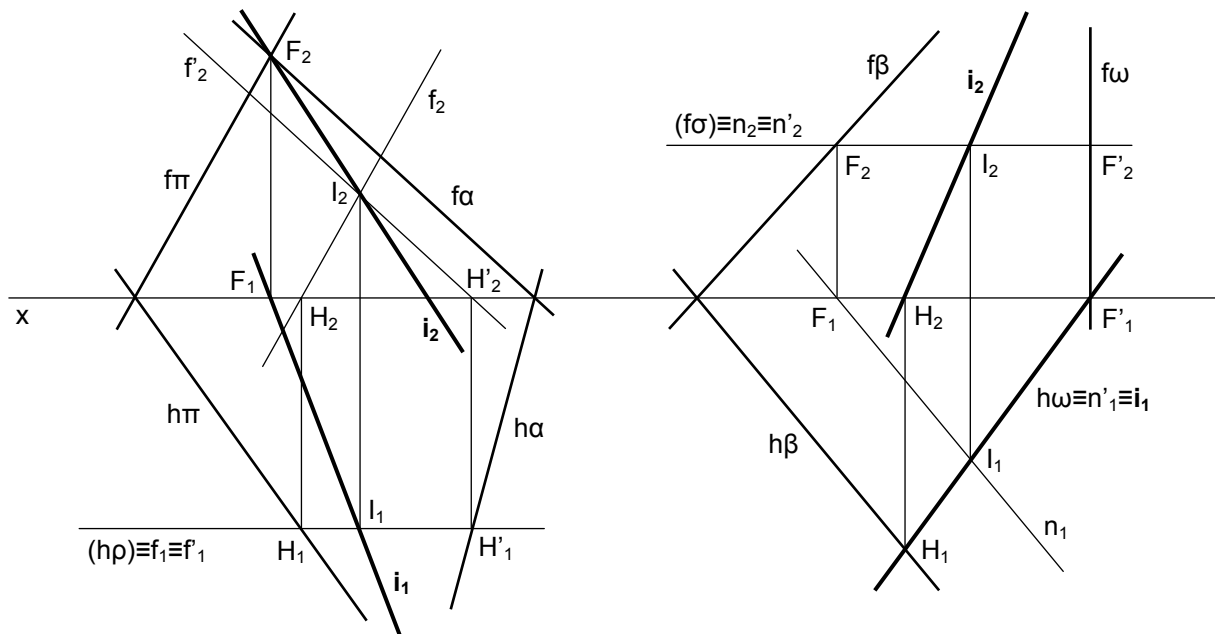
Interseção de planos cujo traços se cruzam apenas num ponto

À partida, estas situações dão apenas um ponto da reta de interseção. Para determinar outro utilizam-se, preferencialmente, planos auxiliares horizontais ou frontais.



Interseção de dois planos cujos traços se cruzam no mesmo ponto do eixo x

À esquerda estão dois planos oblíquos; utilizou-se aí um plano auxiliar horizontal, que cortou os planos dados em duas retas horizontais. À direita temos um plano oblíquo e um de topo; utilizou-se um plano auxiliar frontal que cortou os planos dados em retas frontais. Onde essas retas se cruzam surge o ponto I, contido na reta i , passante.

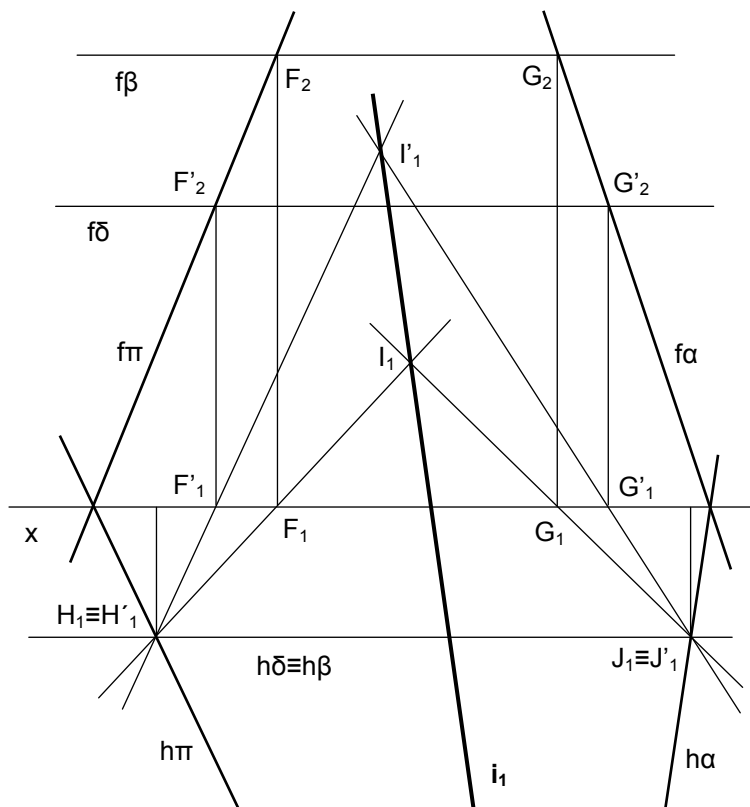
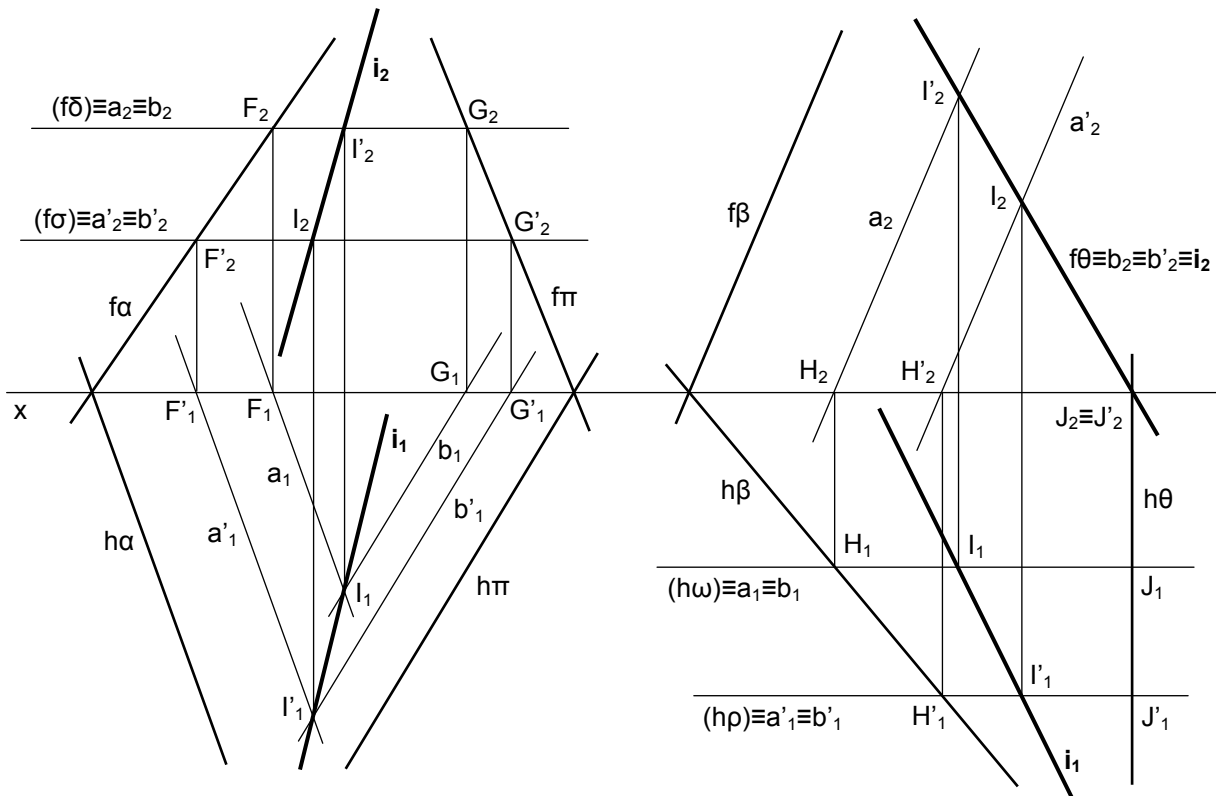


Interseção de dois planos com um dos traços a cruzarem-se fora dos limites do papel

Se se considerar que os traços frontais ou os horizontais não se cruzam nos limites do papel, só se tem acesso a um dos traços da reta de interseção. Nestes casos utiliza-se também um plano auxiliar frontal ou horizontal. Esse plano vai cruzar os planos dados em duas retas que se cruzam no ponto I, que pertence à reta i .

Interseção de planos cujos traços se cruzam ambos fora do papel

Considera-se nestas situações que o cruzamento dos traços se faz fora dos limites do papel, de modo a que não haja acesso aos traços da reta de interseção. Para determinar estas interseções utilizam-se aqui planos auxiliares horizontais e frontais.



Planos cujos traços se cruzam fora dos limites do papel

Em cima, à esquerda, temos a intersecção de dois planos oblíquos resolvida com a utilização de planos auxiliares horizontais.

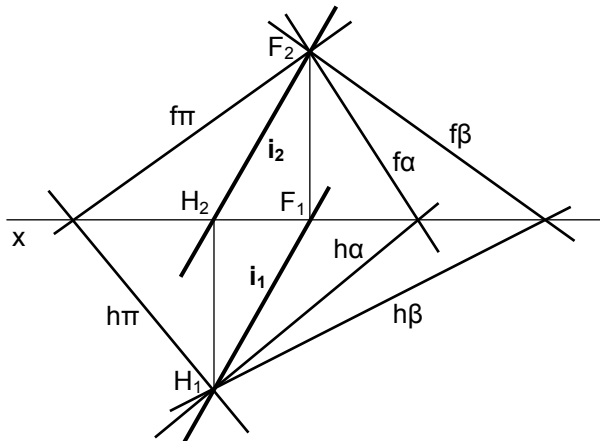
Em cima, à direita, está a intersecção de um plano oblíquo com um de topo resolvida com dois planos frontais.

Ao lado temos a intersecção entre dois planos oblíquos resolvida com planos auxiliares de rampa. Este método utiliza-se quando os traços dos planos dados têm grandes aberturas ou cruzam o eixo x em pontos muito distantes. Dada a quantidade de traçado que produz, mostra-se aqui apenas como se determina uma das projeções da reta de intersecção; para determinar a outra aplicam-se mais dois planos rampa, posicionados de forma inversa.

Nos três casos, os planos auxiliares permitem determinar os pontos I e I' , contidos na reta i .

Interseção entre três planos

Surgem algumas possibilidades diferentes quando se interseitam três planos. Mostram-se aqui três delas, com recurso a planos oblíquos definidos pelos seus traços.



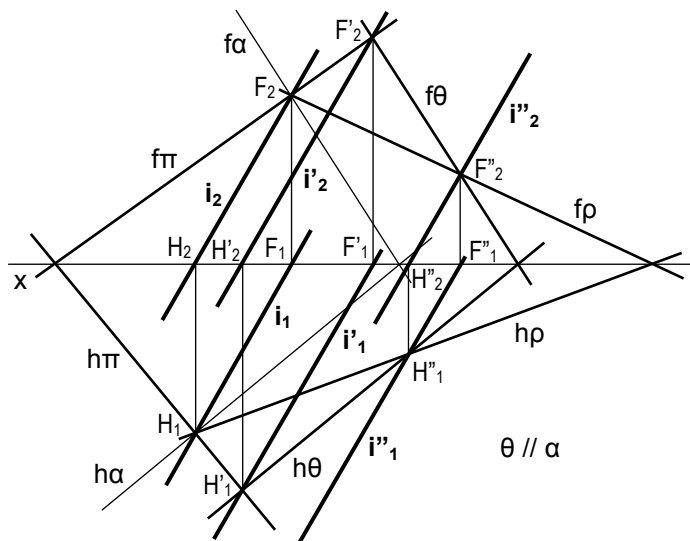
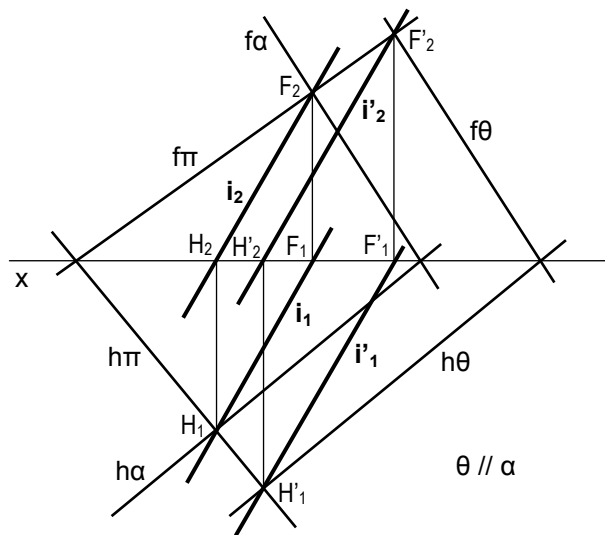
Interseção entre três planos oblíquos, resultando uma reta

Se os três traços horizontais dos planos se encontrarem num mesmo ponto, e a mesma coisa suceder entre os três traços verticais, da interseção entre esses planos resulta uma reta.

Interseção entre três planos oblíquos, resultando duas retas paralelas

Dos três planos que estão à direita, dois são concorrentes, dois são paralelos, resultam daí duas retas paralelas entre si.

Em relação ao exercício anterior, em vez do plano β , está θ , paralelo a α .



Interseção entre três planos oblíquos, resultando três retas paralelas

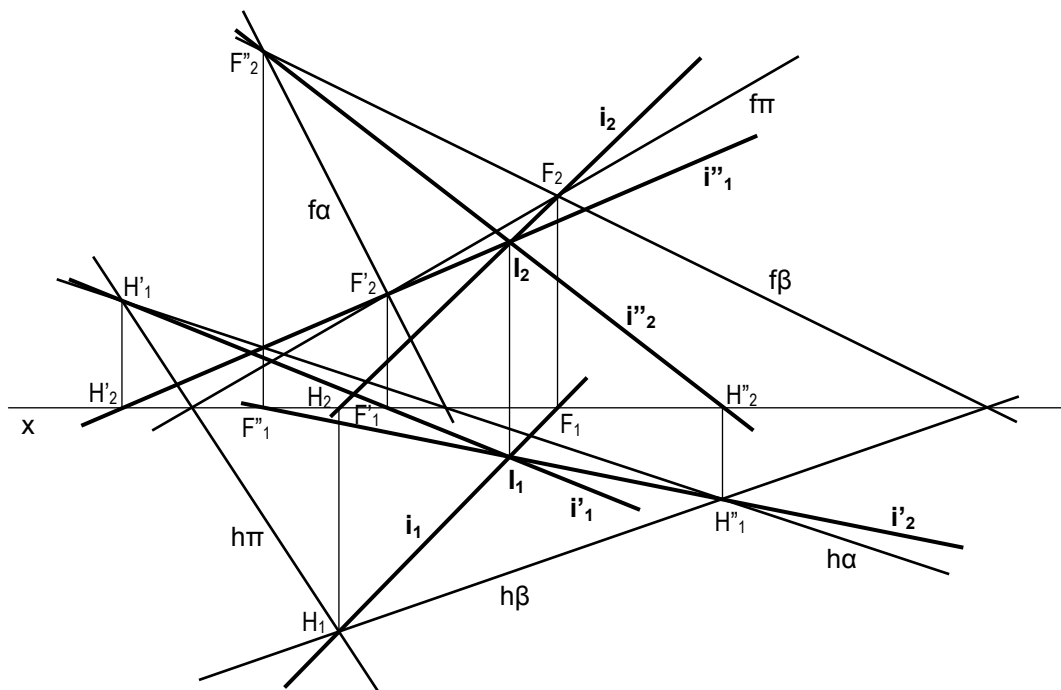
Esta situação é idêntica à anterior, mas o plano α é utilizado para auxiliar para garantir duas retas paralelas. O plano ρ , contendo uma dessas retas, cruza-se com θ numa terceira reta, que será paralela às outras.

Aqui mostra-se mais uma possibilidade resultante da interseção entre três planos oblíquos definidos pelos seus traços.

A interseção entre três planos não variará muito mesmo que se utilizem diferentes tipos de planos. Aliás, havendo planos projetantes os traçados ficarão reduzidos, devido às coincidências entre projeções das retas e traços dos planos; salvo em casos em que seja necessário utilizar algum plano auxiliar, o que torna, naturalmente, os traçados mais elaborados.

Contudo, se um ou mais planos estiverem definidos por pontos ou retas que não os seus traços, os traçados tornam-se muito complexos e labirínticos, mais ainda se se optar, por exemplo, em encontrar retas que, além de concorrentes, sejam também perpendiculares entre si. Embora interessantes, essas situações não são abordadas neste manual.

De referir ainda que uma maior complexidade dos enunciados aumenta também o grau de dificuldade dos exercícios.

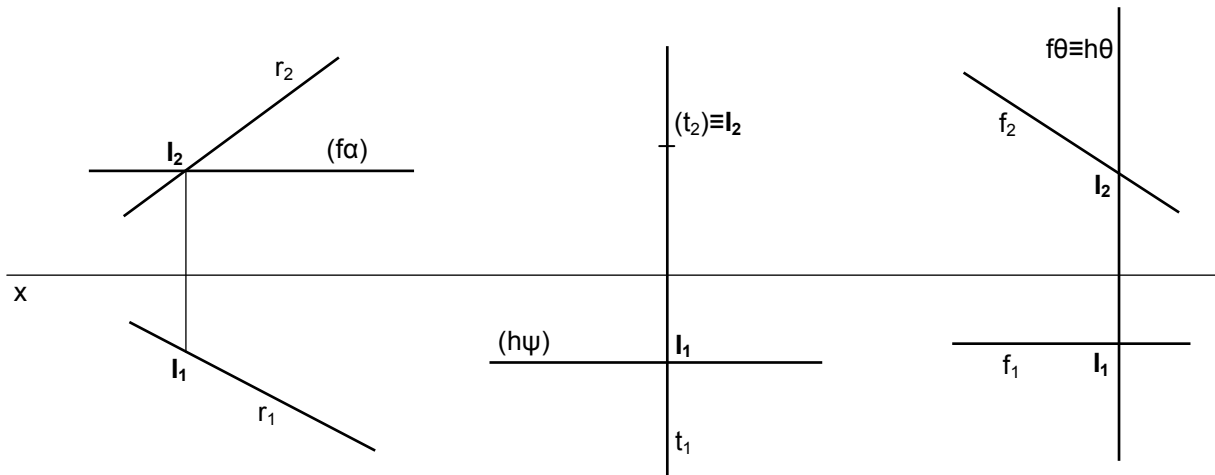


Interseção entre três planos oblíquos, resultando três retas concorrentes

Três planos oblíquos traçados de forma aleatória, ou sem que haja qualquer condição especial entre eles, darão origem a três retas concorrentes num mesmo ponto.

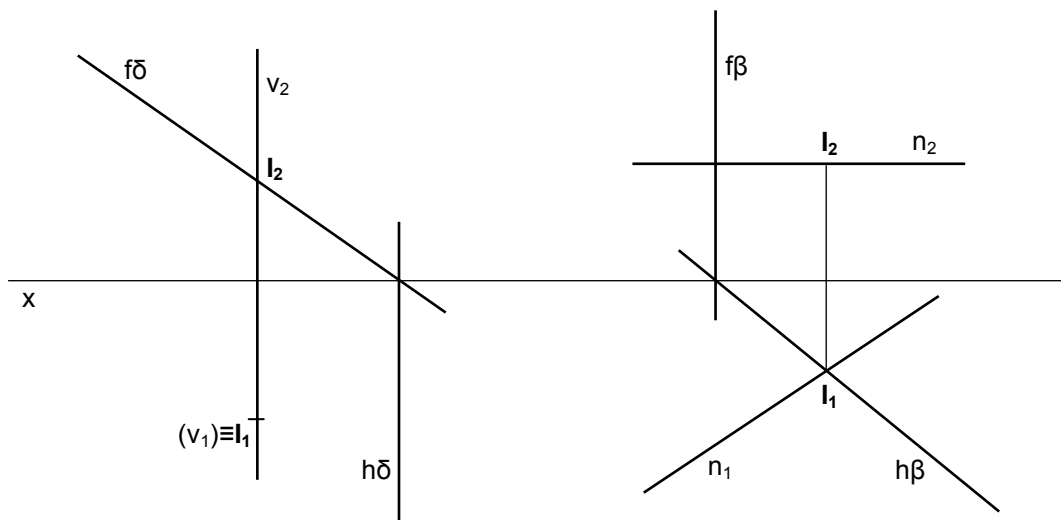
Interseção entre retas e planos projetantes

A interseção entre retas e planos projetantes determina-se diretamente, excetuando no caso da reta de perfil.



Interseção entre retas e os planos horizontal, frontal e de perfil

O plano horizontal é projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto I se determina no cruzamento do seu traço com a projeção frontal da reta. No caso do plano frontal, que é projetante horizontal, é a projeção horizontal do ponto I que se determina em primeiro lugar. No caso do plano de perfil, que é duplamente projetante, basta indicar as projeções do ponto I nos cruzamentos das projeções da reta com os traços do plano.

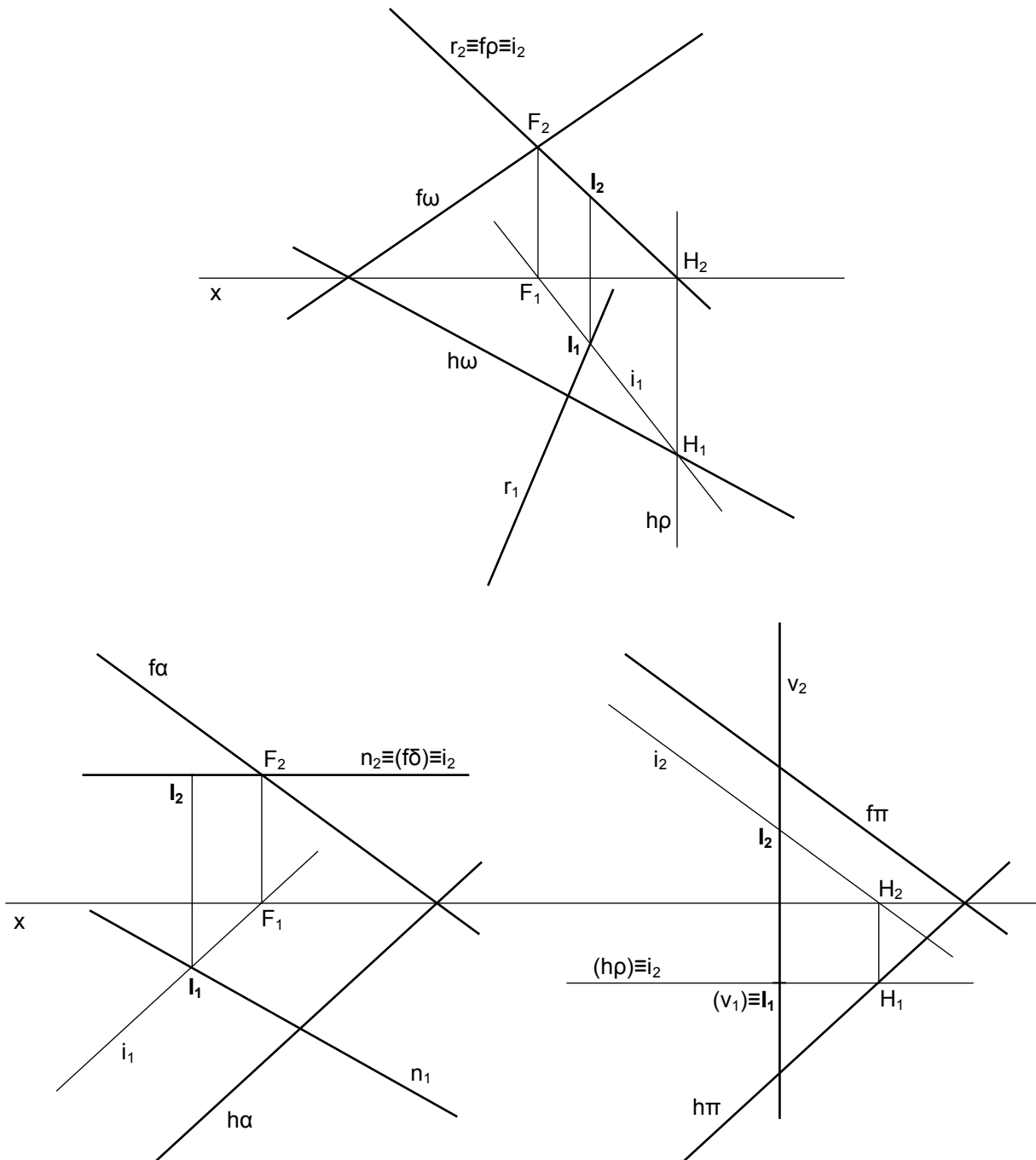


Interseção entre retas e os planos de topo e vertical

O plano de topo é projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto I se determina no cruzamento entre o traço frontal do plano e a projeção frontal da reta. No caso do plano vertical, que é projetante horizontal, é a projeção horizontal que se determina em primeiro lugar.

Intersecção entre uma reta e um plano oblíquo

Excetuando a reta de perfil, a intersecção de qualquer reta com o plano oblíquo pode-se resolver utilizando qualquer plano auxiliar projetante que contenha a reta.



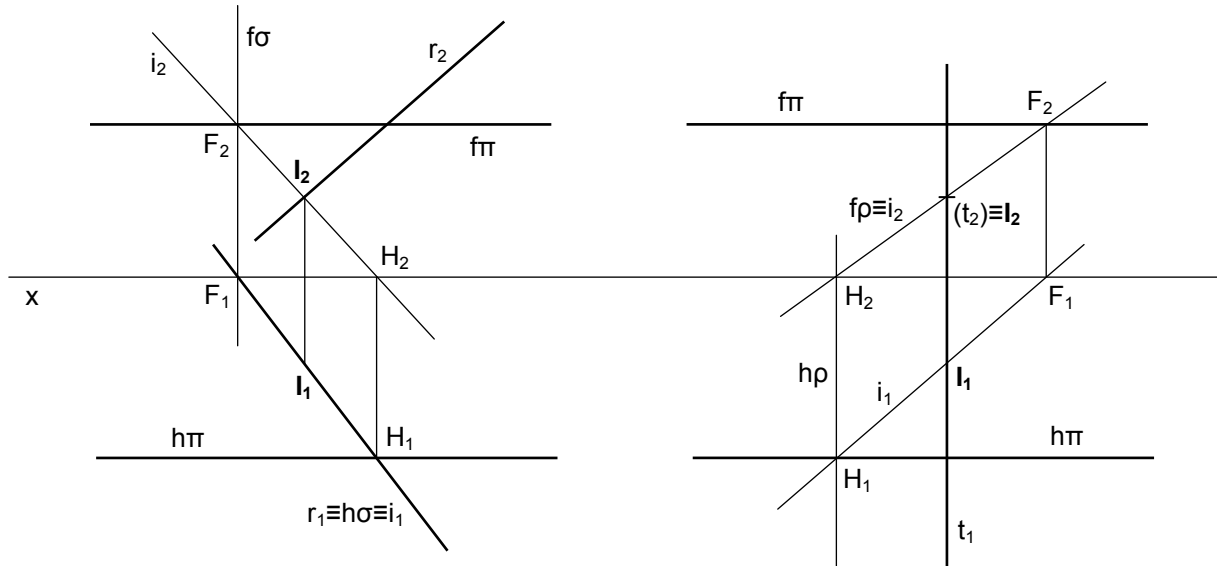
Intersecção entre diferentes retas e o plano oblíquo

No primeiro caso, com a reta oblíqua, utilizou-se um plano auxiliar de topo. No segundo, com uma reta horizontal, utilizou-se um plano horizontal. No último caso, onde a reta é vertical, utilizou-se um plano frontal. Em qualquer das situações se podia ter utilizado um plano vertical contendo a reta.

O plano auxiliar cruza o plano dado na reta i ; essa reta, por sua vez, vai cruzar a reta dada no ponto I .

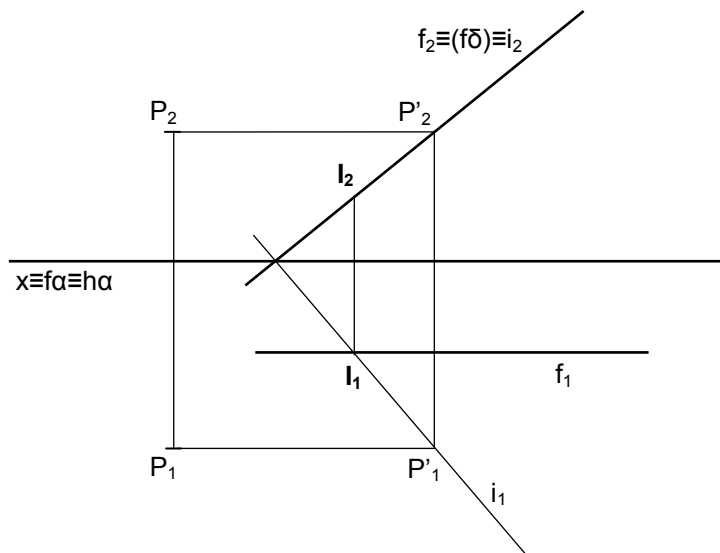
Interseção entre uma reta e um plano de rampa

Mostra-se aqui a interseção entre algumas retas e o plano de rampa. Verifica-se que não existem diferenças significativas em relação ao plano oblíquo. Nos dois exemplos de baixo exemplifica-se com o plano passante.



Interseção de retas com o plano de rampa

No primeiro caso temos uma reta oblíqua e um plano auxiliar vertical. No segundo temos uma reta de topo e um plano auxiliar de topo. A reta i resulta da interseção do plano auxiliar com o plano dado; o ponto I resulta da interseção da reta auxiliar com a dada.

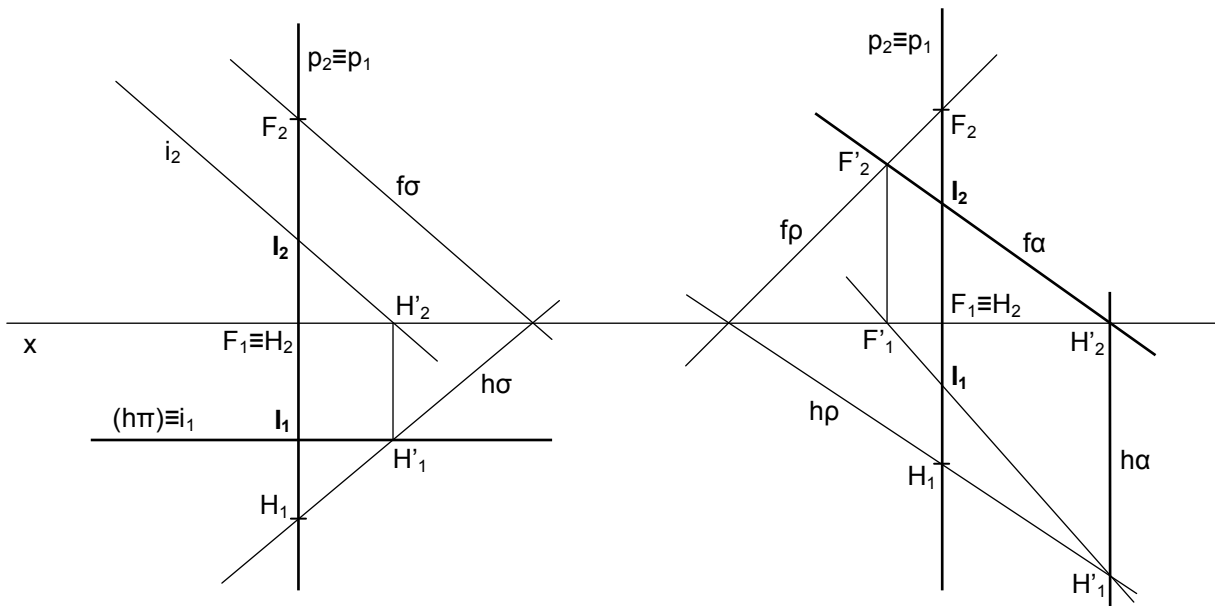


Interseção de uma reta com o plano passante

À esquerda temos uma reta frontal e um plano passante definido pelo ponto P . Utilizando um plano auxiliar de topo desloca-se para esse plano o ponto P' , idêntico a P . A reta i é passante e contém esse ponto, cruzando a reta dada no ponto I . O plano de topo aqui utilizado está representado apenas pelo seu traço frontal, dado que o horizontal é desnecessário. Como tal, indica-se entre parêntesis.

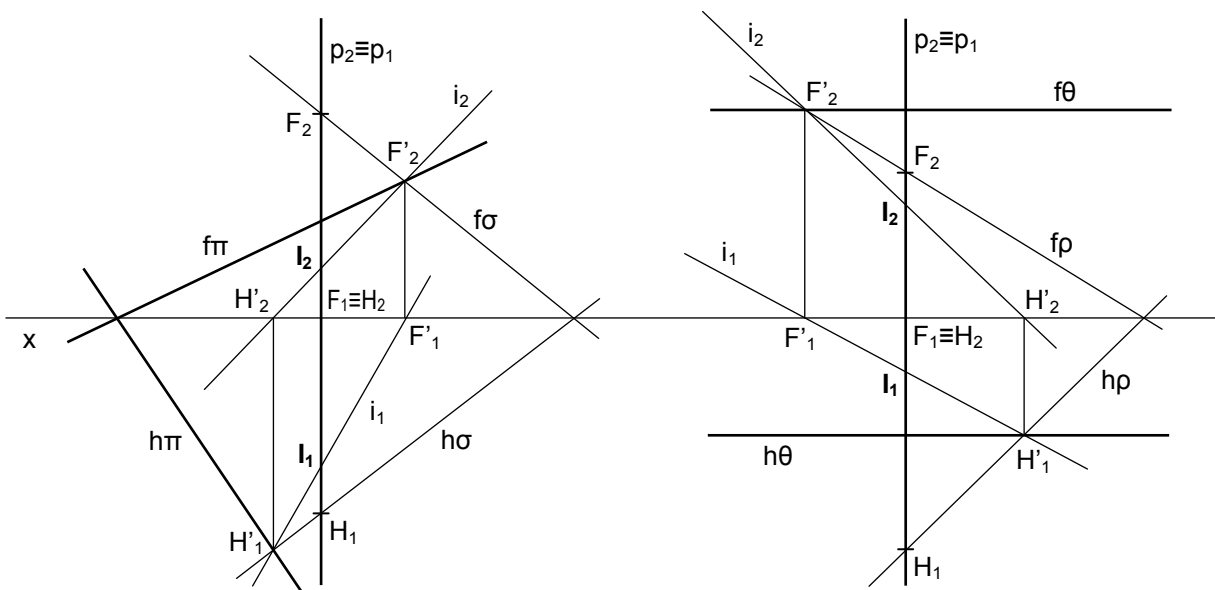
Interseção da reta de perfil com planos diversos

Caso a reta de perfil esteja definida pelos seus traços, é preferível a utilização de planos auxiliares oblíquos, independentemente de o plano dado ser projetante ou não.



Interseção de uma reta de perfil com planos projetantes

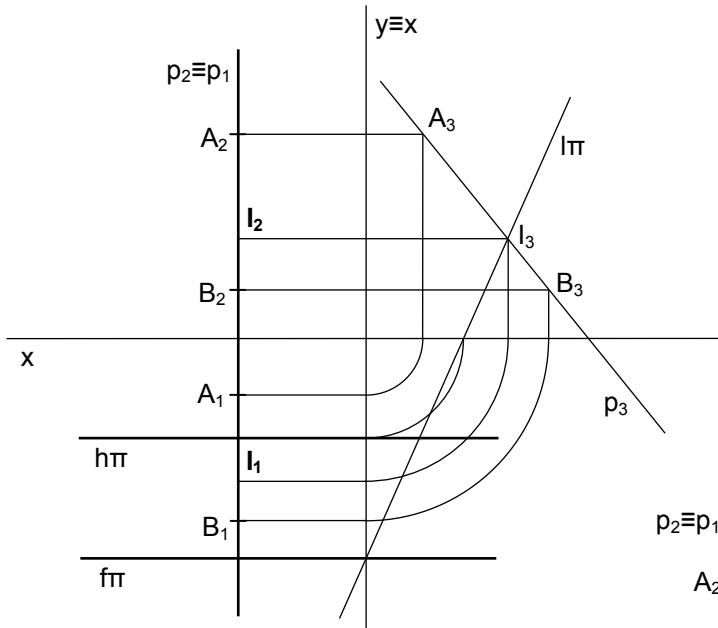
No primeiro caso temos um plano frontal, no segundo um plano de topo. Onde o plano auxiliar oblíquo cruza o plano dado surge a reta i , que se cruza com a reta de perfil no ponto I . Devido ao facto de os planos serem projetantes, sabe-se de antemão uma das projeções do ponto I , contudo é necessária a utilização do plano auxiliar para determinar a projeção em falta.



Interseção de uma reta de perfil com planos não projetantes

À esquerda temos um plano oblíquo, à direita um plano de rampa. Onde o plano auxiliar oblíquo cruza o plano dado surge a reta i , que se cruza com a reta de perfil no ponto I .

Aqui a reta de perfil está definida por dois pontos que não os seus traços. Recorre-se ao plano lateral de projeção e ao plano auxiliar de perfil. Embora se mostre apenas os planos de rampa e oblíquo, qualquer dos processos se pode aplicar à reta de perfil, seja qual for o plano dado, esteja a reta definida pelos traços ou não.

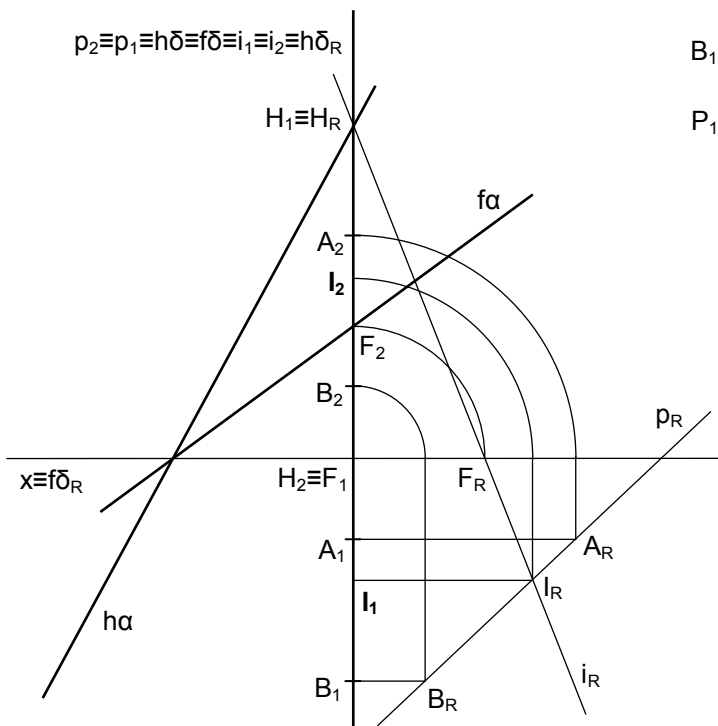
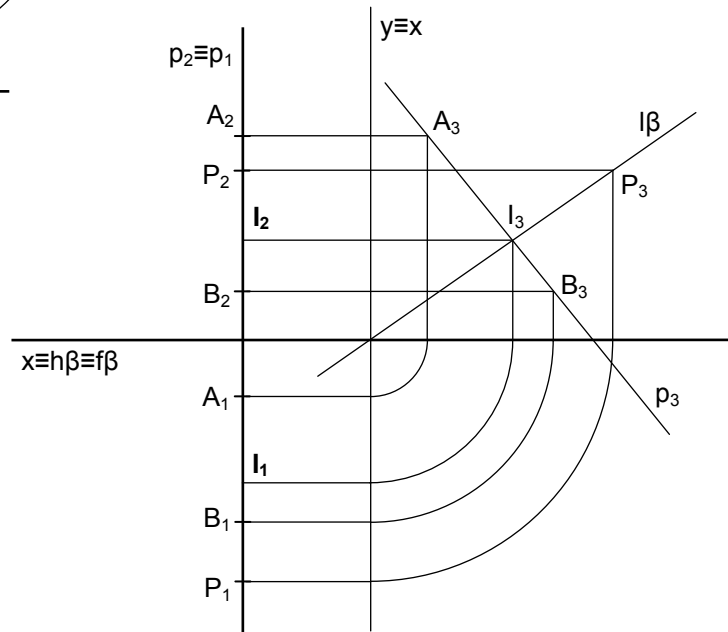


Intersecção da reta de perfil com o plano de rampa

Achando a intersecção da projeção lateral da reta com o traço lateral do plano, descobre-se a projeção lateral do ponto I. A partir dela, indicam-se as projeções principais desse ponto.

Intersecção da reta de perfil com o plano passante

Procedendo como na situação anterior, facilmente se determina o ponto de intersecção da reta de perfil com o plano passante, aqui definido pelo ponto P.

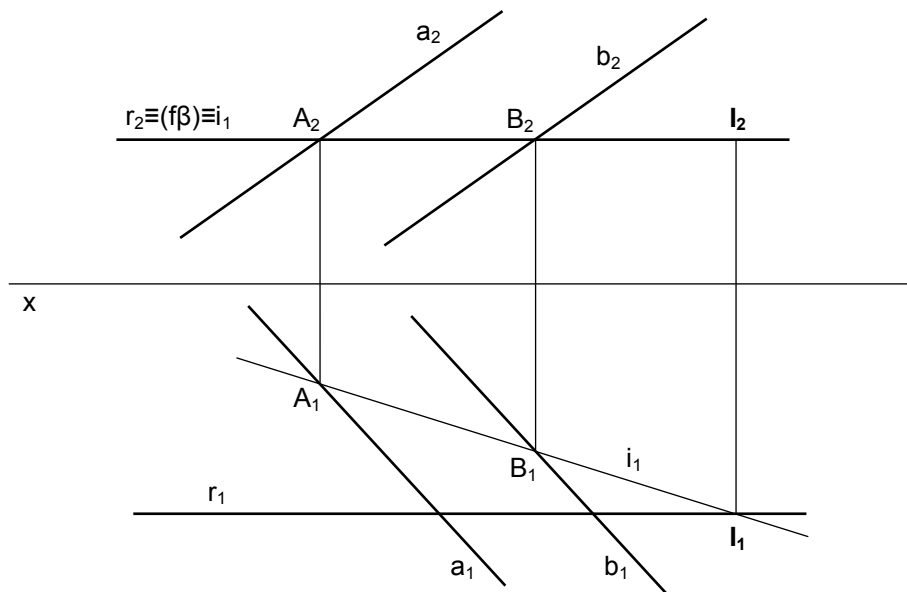
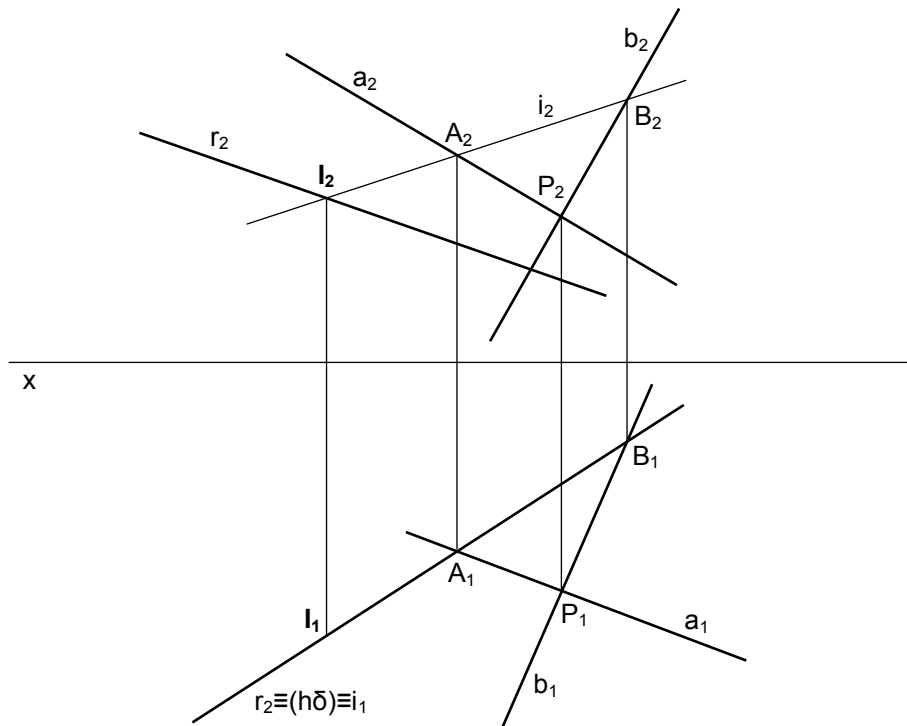


Intersecção da reta de perfil com o plano oblíquo

Aqui utilizou-se um plano auxiliar de perfil, contendo a reta dada. Esse plano intersecta o plano dado na reta i , também de perfil. No rebatimento do plano auxiliar determina-se o ponto I_R , que, contrarreatado, permite determinar as suas projeções.

Interseção entre uma reta e um plano definido por retas

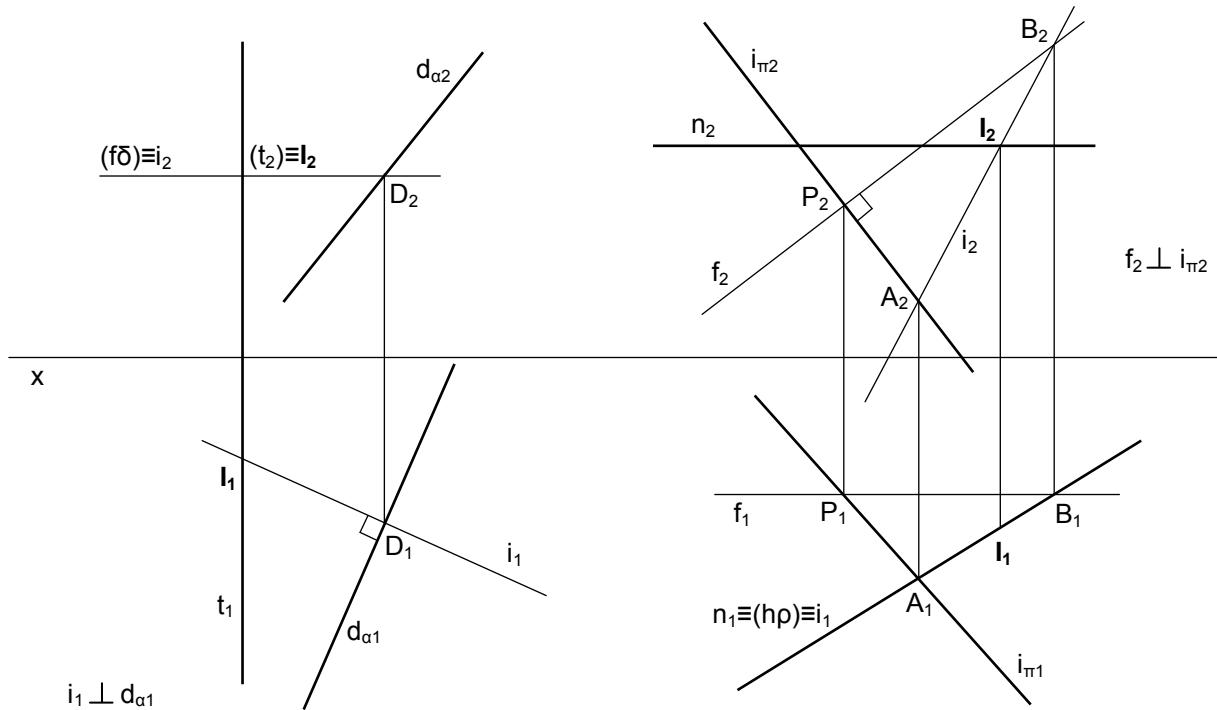
Para a determinação da interseção entre uma reta e um plano definido por retas é também necessário utilizar processos auxiliares. Por norma recorre-se a um plano projetante que contenha a reta que vai intersestar o plano.



Interseção entre uma reta e um plano definido por duas retas

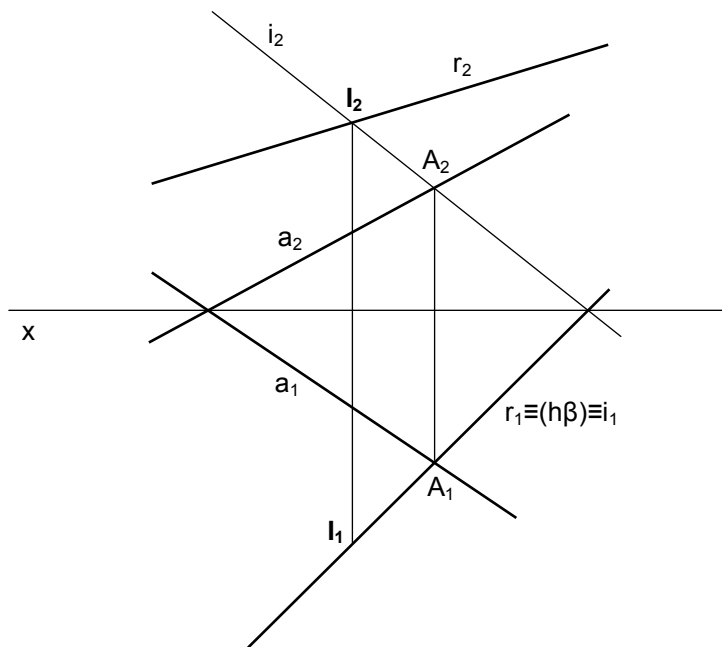
No primeiro caso temos uma reta oblíqua e um plano definido por retas concorrentes; utilizou-se um plano auxiliar vertical. No segundo caso temos uma reta fronto-horizontal e um plano definido por retas paralelas; utilizou-se um plano auxiliar horizontal. Em ambos os casos o plano auxiliar corta o plano definido pelas retas na reta i , que resulta da união dos pontos A e B e se cruza com a reta dada no ponto I.

Aqui mostram-se mais alguns exemplos de interseção de retas com planos definidos por retas.



Interseção de retas com planos definidos por retas de maior declive e de maior inclinação

À esquerda temos a interseção da reta de topo t com o plano α , definido pela reta de maior declive d_α . Trata-se de um caso curioso que se resolve facilmente com a aplicação de um plano auxiliar horizontal, que corta o plano α na reta i , horizontal e perpendicular à reta d_α .
 À direita está a interseção da reta horizontal n com o plano π definido pela reta de maior inclinação i_π . Foi acrescentada uma reta frontal, perpendicular a i_π , e utilizou-se um plano auxiliar vertical. Resulta assim uma situação comum de um plano definido por retas concorrentes.

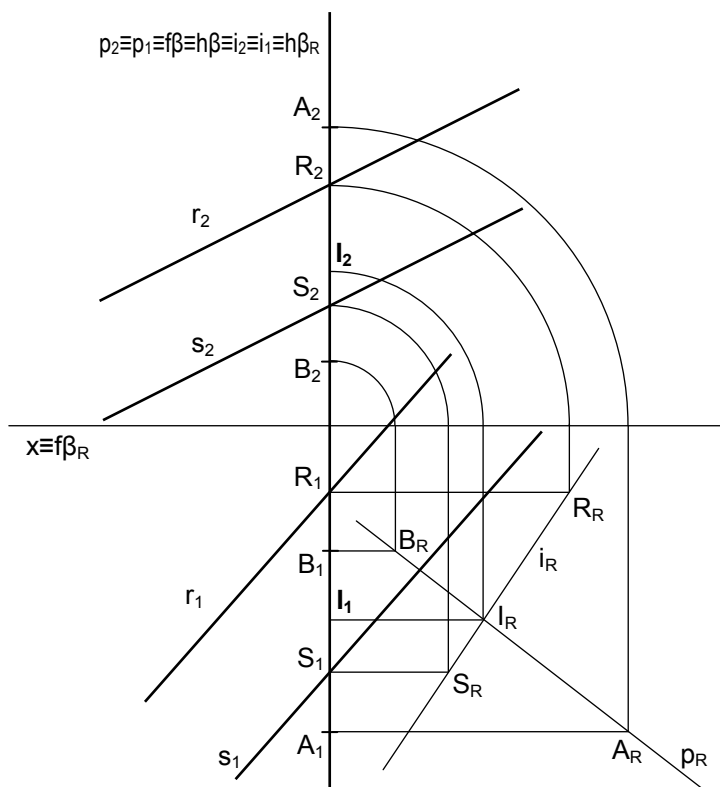
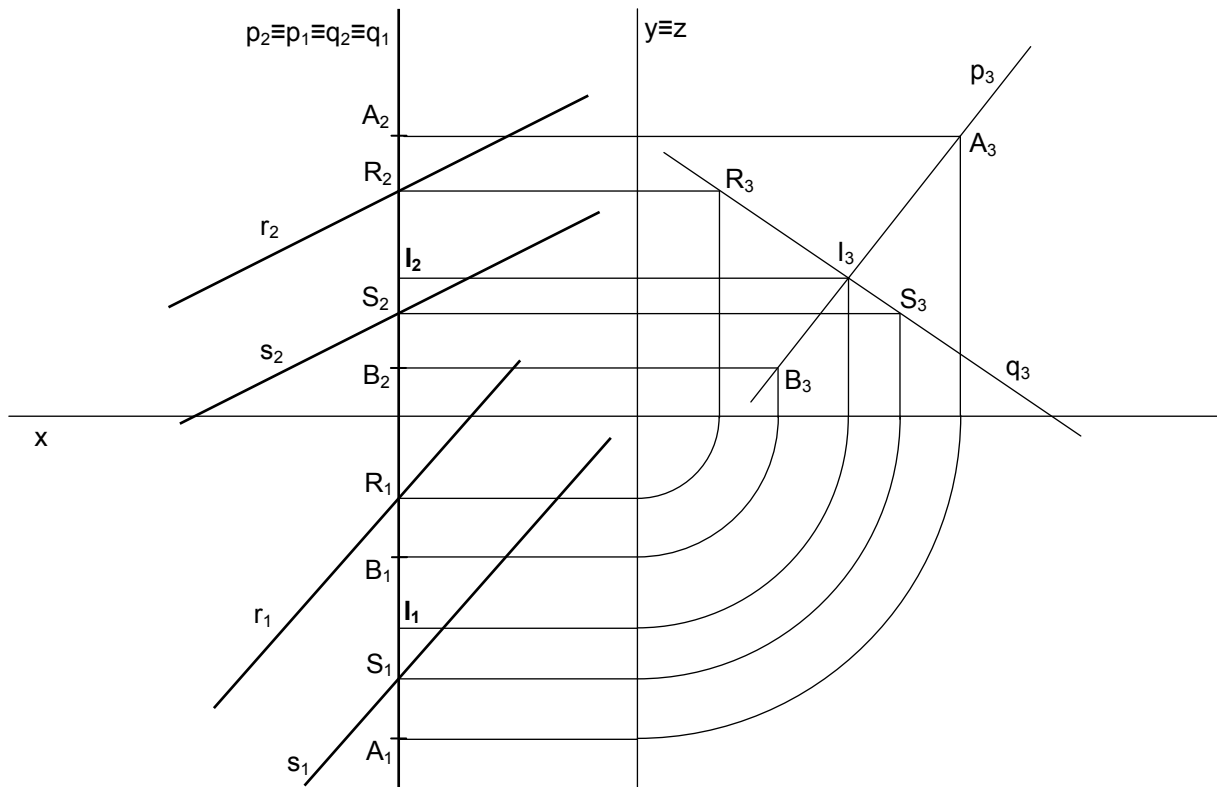


Interseção de uma reta com um plano passante definido por uma reta

Aqui temos uma reta oblíqua e um plano passante definido pela reta a , passante. O plano auxiliar vertical corta essa reta no ponto A , por onde passa a reta i , também passante, que se cruza com a reta dada no ponto I .

Interseção da reta de perfil com planos definidos por retas

Dada a especificidade da reta de perfil ela é tratada com uma atenção particular. Mostra-se aqui a mesma situação resolvida por dois processos.



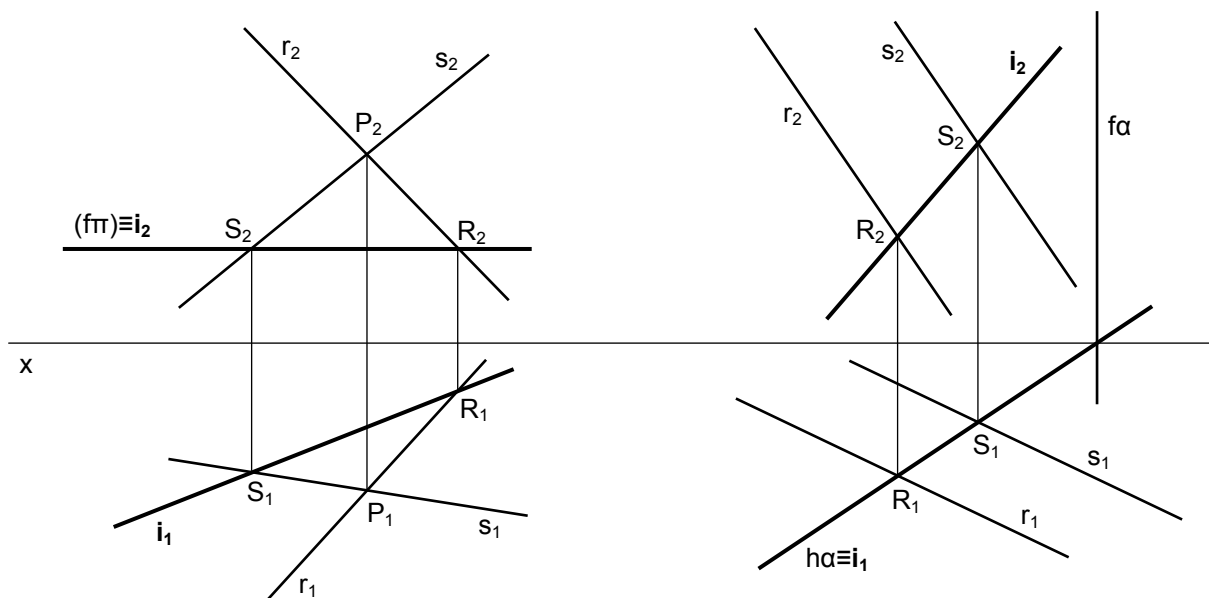
Interseção de uma reta de perfil com um plano definido por duas retas

Em cima temos o exercício resolvido com recurso às projeções laterais. A reta q é uma reta de perfil do plano, definida pelos pontos A e B , das retas a e b , com a mesma abcissa da reta dada p ; trata-se de uma reta onde essa reta cruza a reta dada está o ponto I .

Ao lado temos o mesmo exercício resolvido com um plano auxiliar de perfil, que se rebate. Esse plano cruza o plano definido pelas retas na reta i , que contém os pontos A e B . Essa reta i corresponde à reta q da situação anterior.

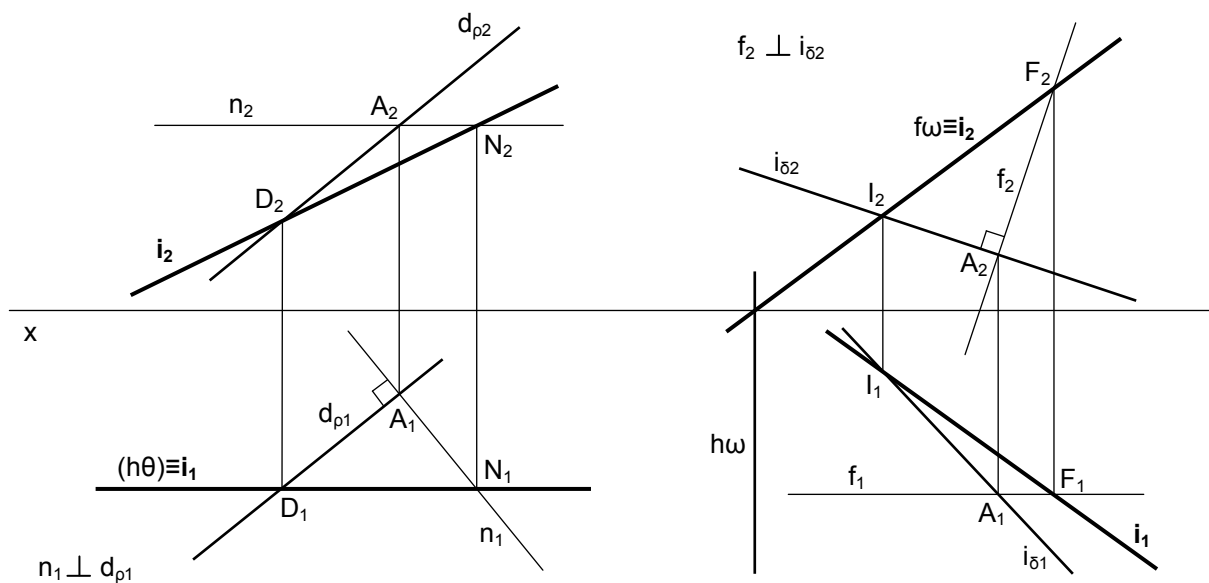
Interseção de planos projetantes com planos definidos por retas

Se, à partida, um plano é definido por três pontos ou por uma reta e um ponto, transforma-se essa situação em planos definidos por duas retas paralelas ou concorrentes, o mesmo sucedendo se o plano estiver definido por uma reta de maior declive ou de maior inclinação.



Interseção de planos projetantes com planos definidos por duas retas

Nestas duas situações, um plano está definido pelas retas r e s , concorrentes num caso, paralelas no outro. Estas intersectam os planos projetantes nos pontos R e S , que definem a reta i .

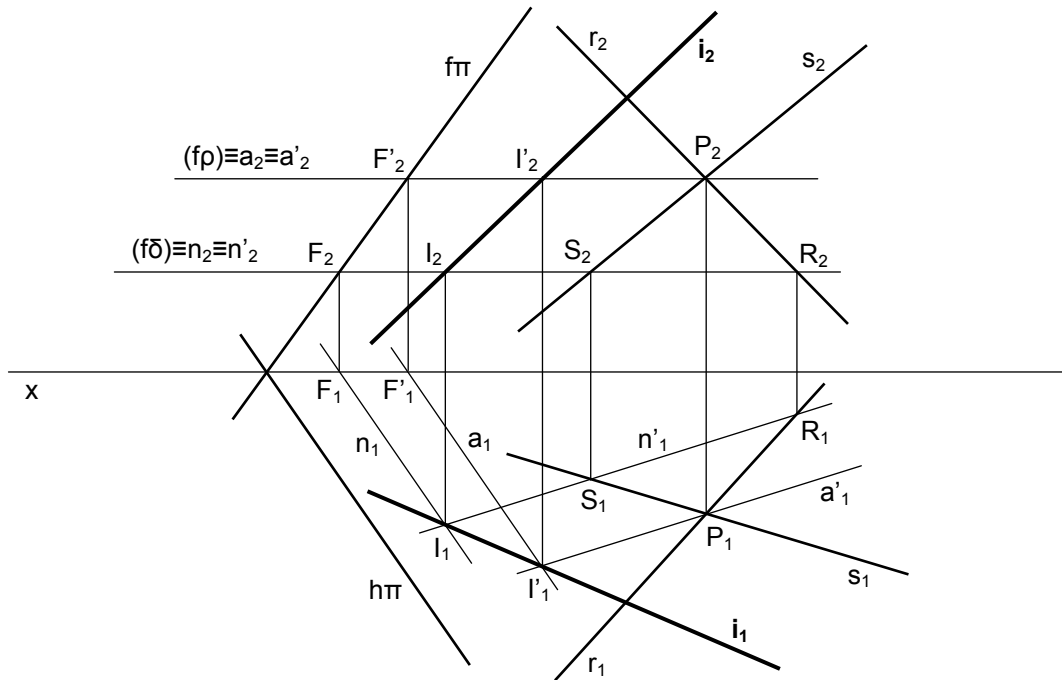


Interseção de planos projetantes com planos definidos pela reta de maior declive e de maior inclinação

À esquerda temos um plano definido por uma reta de maior declive, ao qual se acrescentou uma reta horizontal. À direita um dos planos está definido por uma reta de maior inclinação, tendo-se acrescentado uma reta frontal. Essas retas são concorrentes e perpendiculares à reta dada. Ficando o plano definido por duas retas, procede-se como nos casos anteriores.

Interseção do plano oblíquo com planos definidos por retas

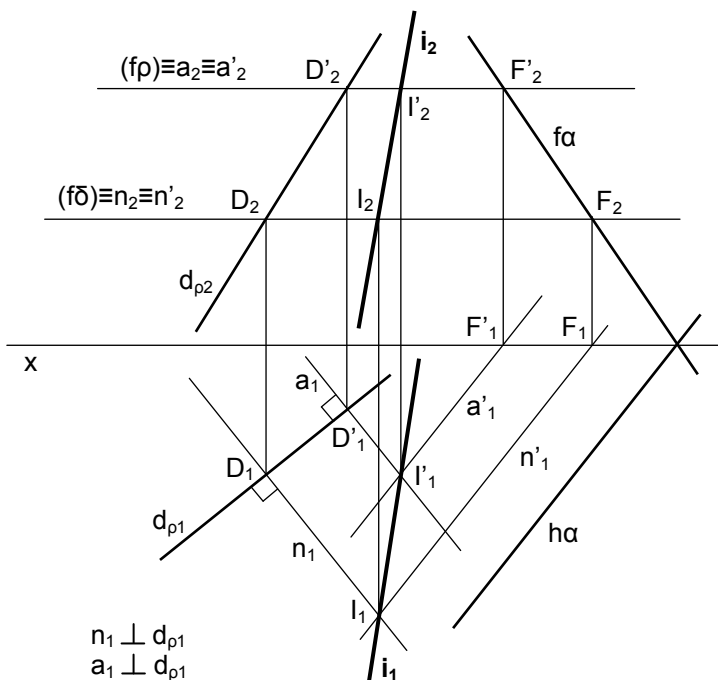
Para determinar a interseção de planos definidos por duas retas com planos oblíquos utilizam-se planos auxiliares horizontais ou frontais, que cortam os planos dados em retas também horizontais ou frontais.



Interseção de um plano oblíquo com um plano definido por duas retas

Cada um dos planos auxiliares horizontais corta os planos dados segundo retas horizontais. Essas retas cruzam-se nos pontos I e I', que definem a reta i.

Optou-se por passar o segundo plano por P, onde se intersectam as retas dadas, o que é possível porque as retas horizontais de cada plano são paralelas entre si. Assim poupou-se traçado.

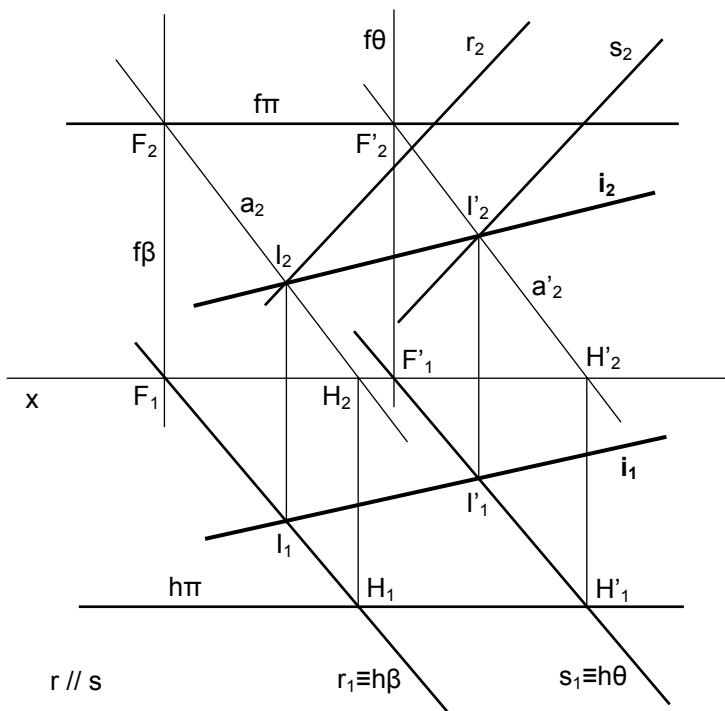
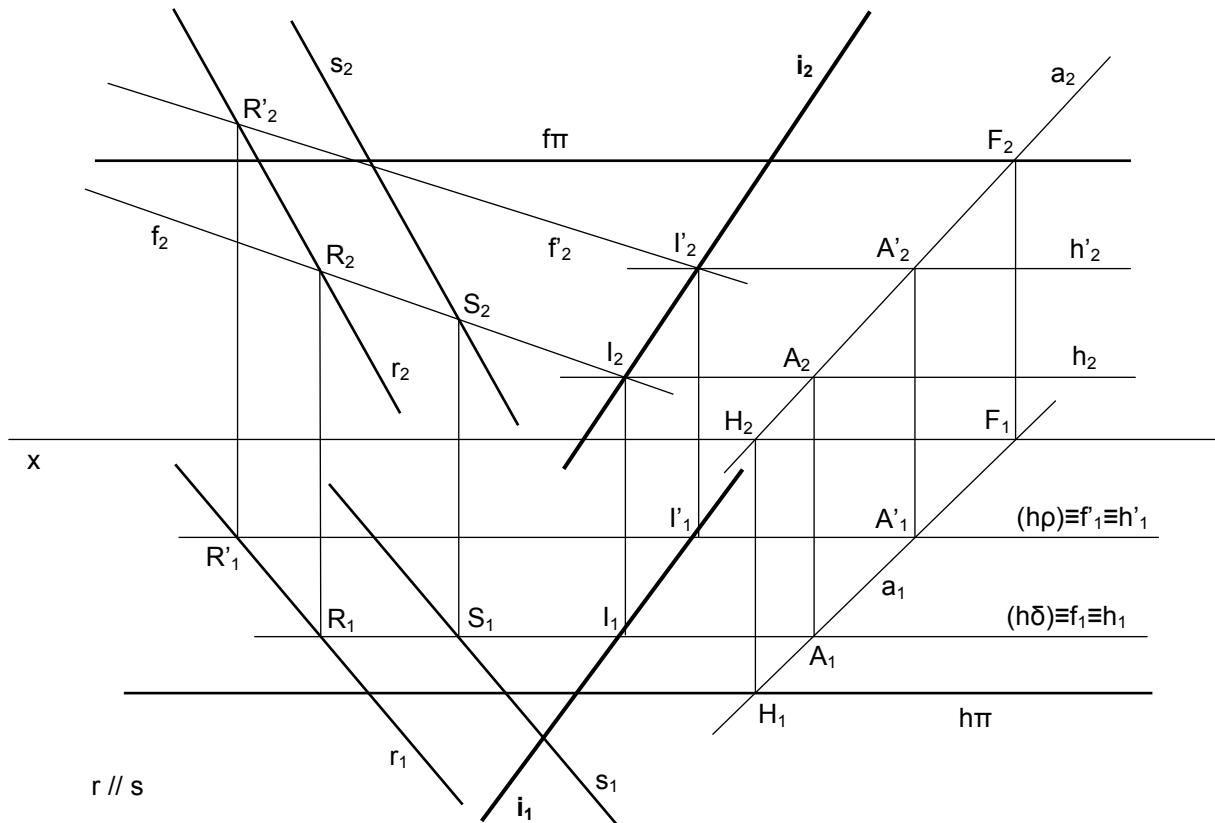


Interseção de um plano oblíquo com um plano definido por uma reta de maior declive

Devem utilizar-se planos auxiliares horizontais caso um dos planos seja definido por uma reta de maior declive, dado que as retas horizontais desse plano são perpendiculares a essa reta. Com um plano definido por uma reta de maior inclinação devem utilizar-se planos auxiliares frontais.

Interseção do plano de rampa com planos definidos por retas

Para determinar a interseção de planos definidos por duas retas com planos de rampa apresentam-se dois processos. Aqui um dos planos está definido por duas retas paralelas.



Interseção de um plano de rampa com um plano definido por duas retas

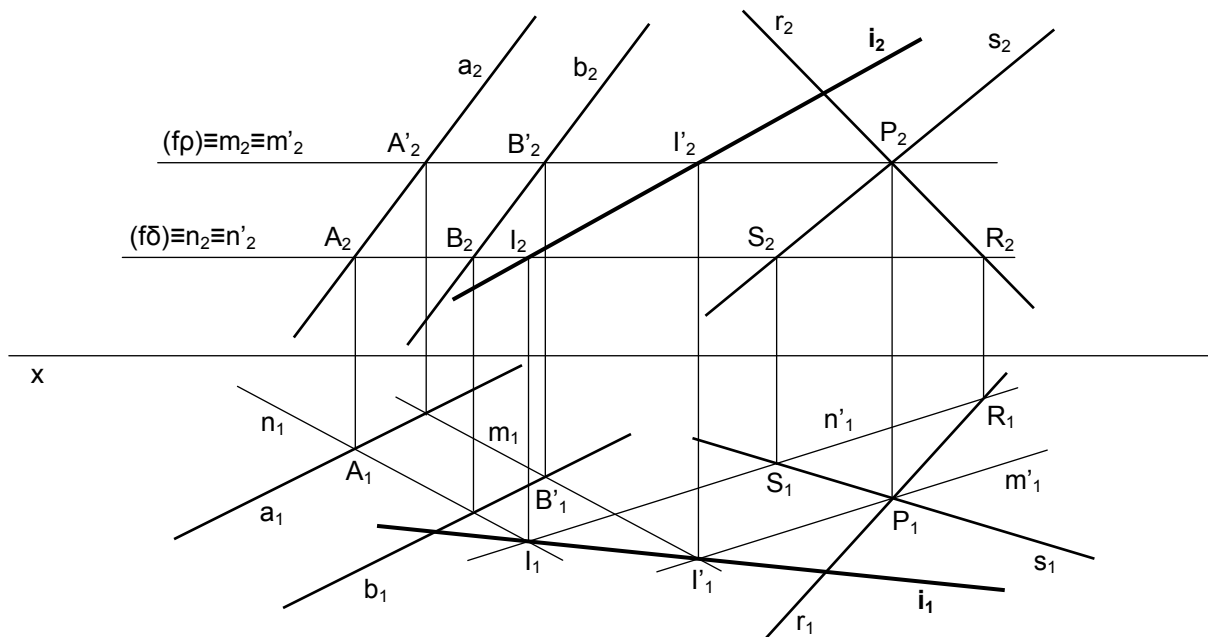
No primeiro caso utilizam-se planos frontais que cortam o plano definido pelas retas r e s em retas frontais e o plano de rampa em retas fronto-horizontais. Para se poder representar estas retas traçou-se de antemão a reta oblíqua a , do plano de rampa.

No segundo caso utilizaram-se planos projetantes, cada um deles contendo uma reta dada, o que permite determinar os pontos de interseção de cada uma das retas com o plano dado. Obviamente, esses pontos pertencem à reta i .

Este segundo processo apresenta menos traçado e pode também ser empregue no plano oblíquo. Contudo, com este processo, corre-se o risco de as retas de interseção resultantes da aplicação dos planos auxiliares não encontrarem as retas dadas nos limites do papel.

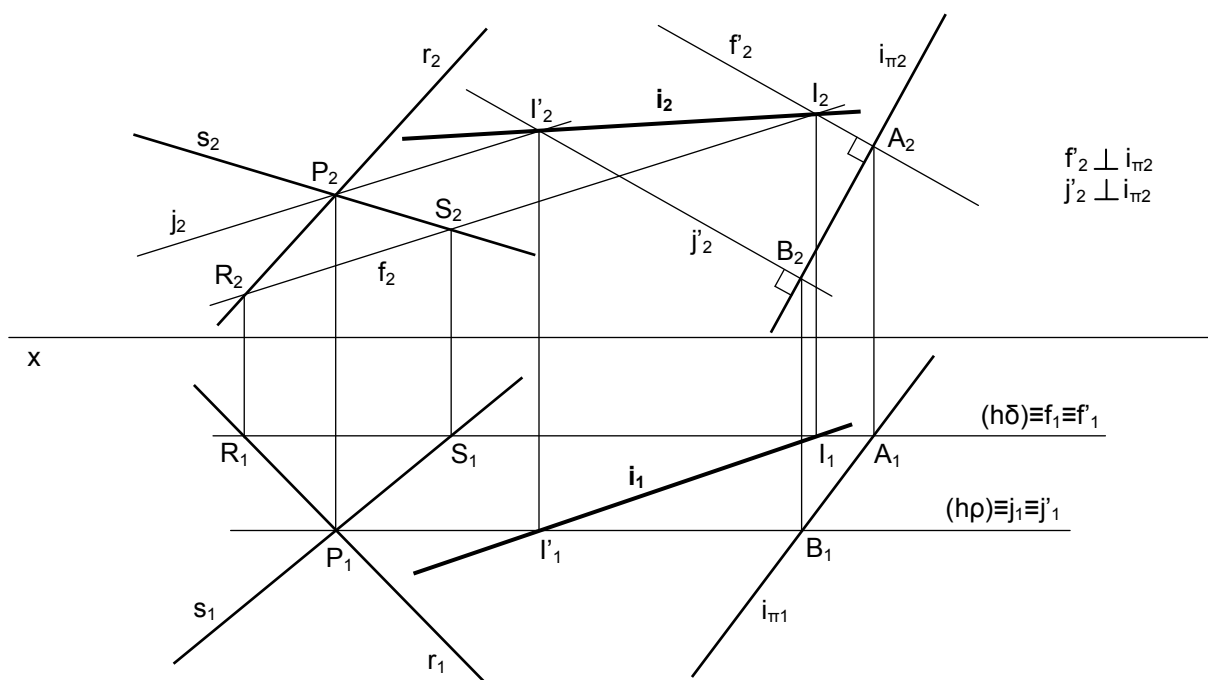
Interseção entre planos definidos por retas

Sendo ambos os planos definidos por retas, utilizam-se também planos auxiliares horizontais ou frontais.



Interseção entre dois planos definido por duas retas

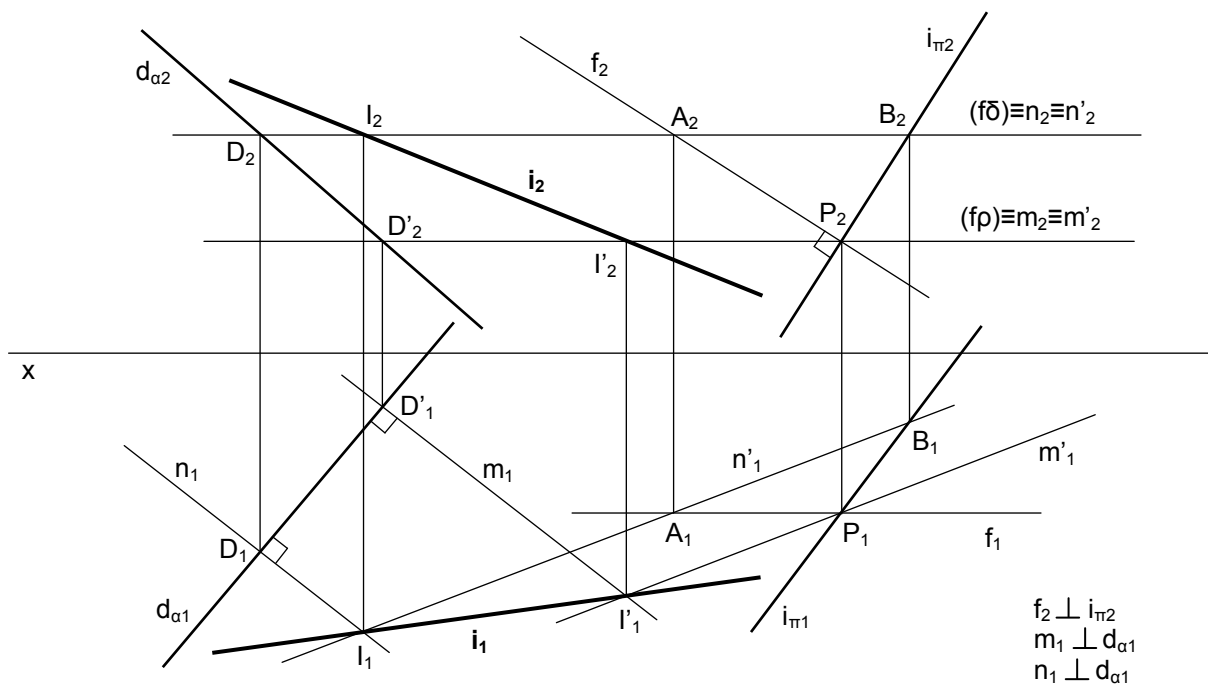
Um dos planos está definido pelas retas a e b, paralelas, o outro pelas retas r e s, concorrentes. Aplicando planos auxiliares horizontais surgem quatro retas horizontais que se cruzam duas a duas nos pontos I e I', por onde passa a reta i.



Interseção de um plano definido por duas retas com um definido por uma reta de maior inclinação

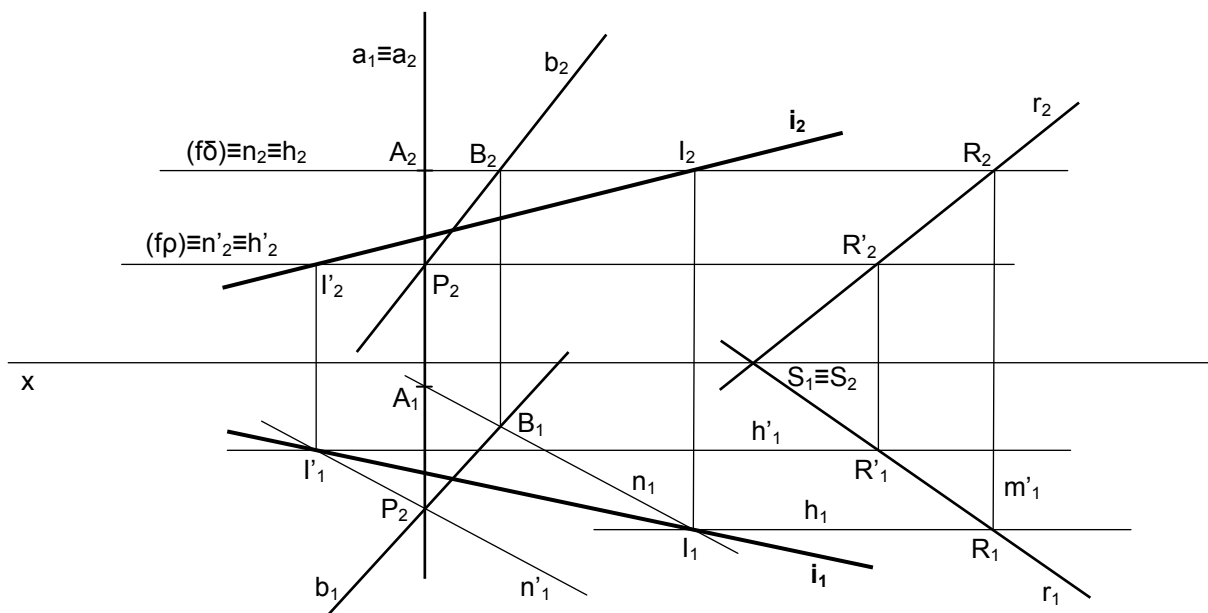
Estando um plano definido por uma reta de maior inclinação, é preferível utilizar planos auxiliares frontais, já que sabemos que as retas frontais daí resultantes serão perpendiculares à reta dada. Tudo o resto se assemelha ao caso anterior.

Apresentam-se nesta página mais algumas interseções entre planos definidos por retas.



**Interseção entre um plano definido por uma reta de maior declive
e um definido por uma reta de maior inclinação**

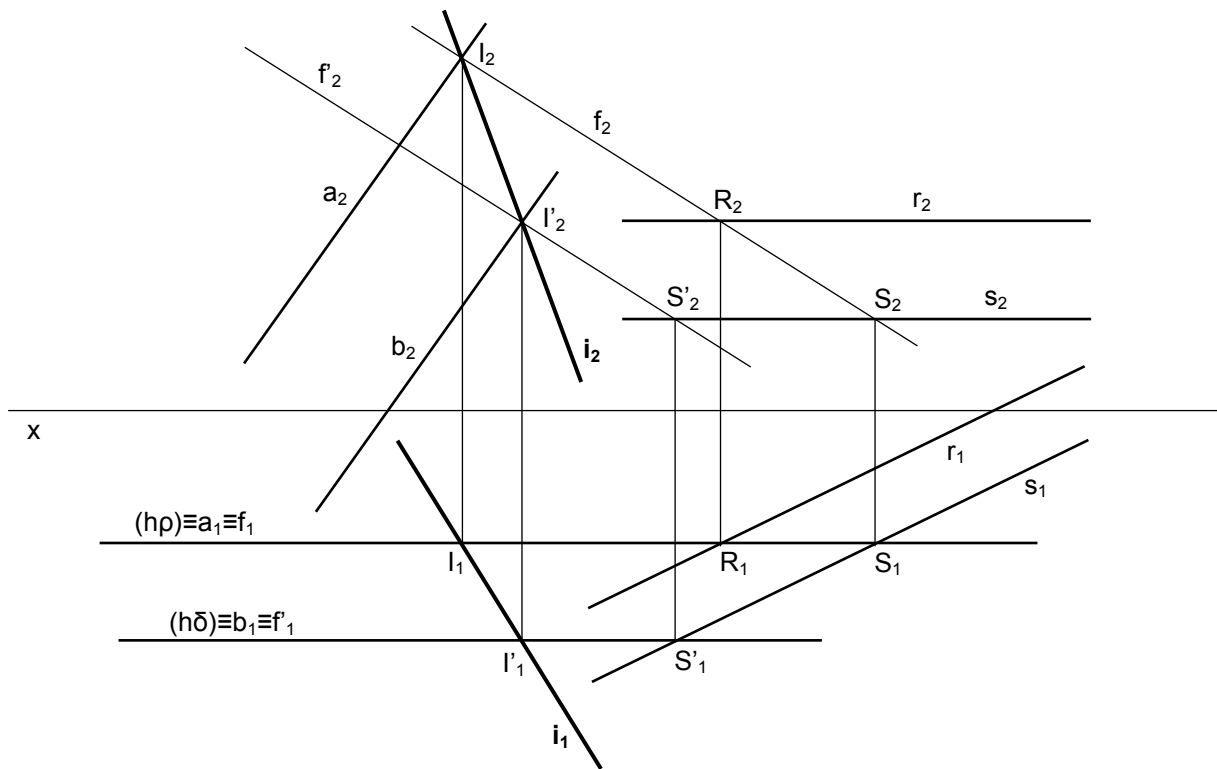
Planos auxiliares horizontais dão-nos retas horizontais perpendiculares à reta de maior declive. Contudo, é necessário acrescentar uma reta frontal, perpendicular à reta de maior inclinação, para se determinarem as retas horizontais do plano definido por ela.



**Interseção entre um plano definido por duas retas
e um plano passante definido por uma reta oblíqua**

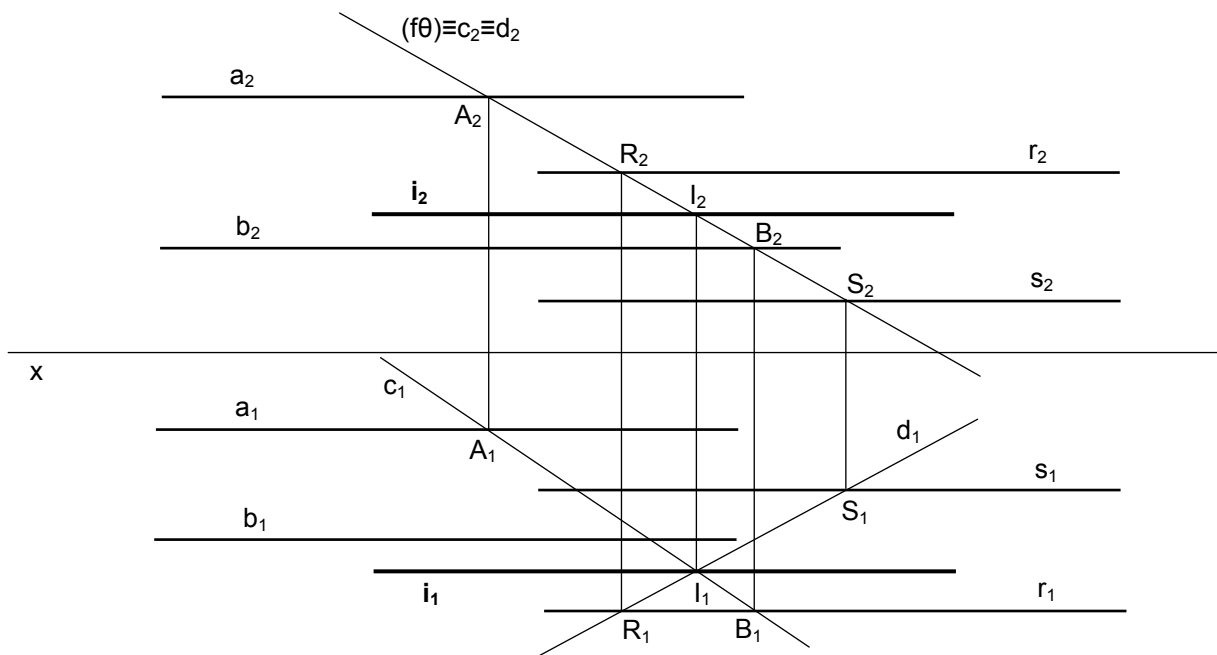
O plano passante está definido pela reta r passante em S; o outro plano está definido pelas retas a e b, concorrentes no ponto P, sendo b oblíqua e a de perfil, definida também pelo ponto A. Os planos auxiliares horizontais cortam o plano passante em retas fronto-horizontais, como acontece com qualquer plano de rampa.

Aqui apresentam-se dois exemplos curiosos de interseção de planos definidos por retas paralelas.



Intersecção entre um plano definido por retas frontais e um definido por retas horizontais

Planos auxiliares frontais contêm as retas frontais dadas e, ao cruzarem as retas r e s dão origem a outras retas frontais. Uma e outras cruzam-se nos pontos I e I' , que definem a reta i .



Intersecção entre dois planos definidos por retas fronto-horizontais

Neste caso é preferível utilizar um plano auxiliar de topo ou vertical, para que o seu traço possa cortar as retas que definem os planos. Aqui utilizou-se um plano de topo, tendo sido traçado apenas o seu traço frontal, dado que o horizontal não teria utilidade. Como se sabe de antemão que a reta i é fronto-horizontal basta utilizar um plano auxiliar e determinar um ponto.

Interseções – Exercícios

Interseção entre planos projetantes

1. Determinar a reta de interseção i , entre os planos verticais:

- α , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa e faz 25° ae;
- π , que cruza o eixo x num ponto com -1cm de abcissa e faz 55° ae.

2. Determinar a reta de interseção i , entre os planos de topo:

- θ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa e faz 65° ae;
- β , que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa e faz 30° ad.

3. Determinar a reta de interseção i , entre os seguintes planos, ambos contendo o ponto $P(1;3;2)$:

- ρ , de topo, que faz 40° ad;
- δ , vertical, que faz 30° ae.

4. Determinar a reta de interseção i , entre os seguintes planos, ambos contendo o ponto $R(2;4;-2)$:

- ω , vertical, que faz 35° ad;
- σ , horizontal.

5. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- π , horizontal, com 3cm de cota;
- β , frontal, com -2cm de afastamento.

6. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- δ , de perfil;
- ω , horizontal, com -2cm de cota.

7. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- σ , de perfil, com 2cm de abcissa;
- ρ , vertical, que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa e faz 30° ad.

8. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- θ , de topo, que faz 45° ad;
- α , frontal, com -3cm de afastamento.

Interseção de planos projetantes com planos não projetantes

9. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- β , oblíquo, cujos traços fazem ambos 50° ad;
- ψ , frontal, com 3cm de afastamento.

10. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- π , oblíquo, perpendicular ao $\beta_{1/3}$, fazendo o seu traço frontal 60° ae;
- v , horizontal, com -4cm de cota.

11. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- φ , oblíquo, que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, cujos traços frontal e horizontal fazem, 60° ad e 35° ae, respectivamente;
- θ , de perfil, com 1cm de abcissa.

12. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- δ , oblíquo, perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 40° ae;
- ω , horizontal, com 3cm de abcissa.

13. Determinar a recta de interseção i , entre os planos:

- δ , do exercício anterior;
- π , de perfil, com -2cm de abcissa.

14. Determinar a recta de interseção i , entre os planos:

- δ , do exercício 12;
- θ , de topo, que cruza o eixo x num ponto com 6cm de abcissa, fazendo 50° ad.

15. Determinar a recta de interseção i , entre os planos:

- δ , do exercício 12;
- ψ , vertical, que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa e faz 40° ae.

16. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- β , de rampa, cujos traços frontal e horizontal têm 4cm de cota e -2cm de afastamento, respectivamente;
- ψ do exercício anterior.

17. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- α , de rampa, cujos traços frontal e horizontal têm -5cm de cota e 3cm de afastamento, respectivamente;
- θ , do exercício 14.

18. Determinar a reta i , de interseção entre os planos:

- σ , de rampa, perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço frontal tem 3cm de cota;
- π , de perfil, com 2cm de abcissa.

19. Determinar a reta i , de interseção entre os planos:

- σ , de rampa, perpendicular ao $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal tem 5cm de cota;
- v , horizontal, com 3cm de cota.

20. Determinar a reta i , de interseção entre:

- σ , do exercício anterior;
- φ , frontal, com -3cm de afastamento.

Interseção entre planos não projetantes

21. Determinar a reta de interseção i , entre os planos oblíquos:

- π , que cruza o eixo x num ponto com 5cm de abcissa, cujos traços frontal e horizontal fazem 65° ad e 30° ad, respectivamente;
- ρ , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa, cujos traços frontal e horizontal fazem 25° ad e 55° ad, respectivamente.

22. Determinar a reta de interseção i , entre os planos oblíquos:

- π , do exercício anterior;
- θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa, fazendo o seu traço horizontal 55° ad.

23. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- θ , do exercício anterior;
- ρ , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, sendo o seu traço horizontal paralelo ao traço homónimo do outro plano.

24. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- ρ , do exercício anterior;
- α , de rampa, perpendicular ao $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal tem 4cm de cota.

25. Determinar a reta de interseção i , entre os planos:

- ρ , do exercício 23;
- π , passante, contendo o ponto $P(-3;4;2)$.

26. Determinar a reta de interseção i , entre os planos de rampa:

- δ , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal tem -5cm de cota;
- ω , cujos traços frontal e horizontal têm -2cm de cota e -3cm de afastamento, respectivamente.

27. Determinar a reta de interseção i , entre os planos de rampa:

- ψ , cujos traços frontal e horizontal têm 4cm de cota e -2cm de afastamento, respectivamente;
- θ , passante, contendo a recta fronto-horizontal b , com 3cm de afastamento e 1cm de cota.

28. Determinar a reta de interseção i , entre os planos de rampa:

- σ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço horizontal tem 3cm de afastamento;
- ρ , passante, contendo o ponto $P(4;3;-3)$.

29. Determinar a reta de interseção i , entre os planos de rampa:

- α , cujos traços frontal e horizontal têm -2cm de afastamento e -4cm de cota, respectivamente
- π , passante, contendo o ponto $R(3;4;-5)$.

Interseção de planos cujos traços não se encontram nos limites do papel

30. Determinar a reta de interseção i , sem cruzar os traços frontais dos planos:

- δ , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 50° ad;
- ω , que cruza o eixo x num ponto com -4cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 70° ad e 45° ae, respetivamente.

31. Determinar a reta de interseção i , sem cruzar os traços horizontais dos planos:

- ψ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com -5cm de abcissa, fazendo o seu traço horizontal 40° ad;
- σ , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de cota, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ad e 65° ad, respetivamente.

32. Determinar a reta de interseção i , sem cruzar os traços horizontais nem frontais dos planos:

- θ , que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 55° ae e 65° ae, respetivamente;
- β , que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 65° ad e 50° ad, respetivamente.

33. Determinar a reta de interseção i , sem cruzar os traços horizontais nem frontais dos planos:

- θ , do exercício anterior;
- π , vertical, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa e faz 50° ae.

Interseção de três planos

34. Representar a reta i , que contém o ponto $P(4;3;3)$, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 40° ae e 60° ad, respetivamente. Traçar três planos que se intersectem nessa reta, sendo:

- α , oblíquo, com os traços com abertura para a direita;
- θ , de rampa;
- π , perpendicular ao $\beta_{2/4}$.

35. Determinar as retas i e i' , resultantes da interseção entre os planos:

- ρ , que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ad e 60° ae, respetivamente;
- δ , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, que cruza o eixo x num ponto com -1cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 50° ad;
- θ , paralelo ao anterior, cruzando o eixo x num ponto com -4cm de abcissa.

36. Representar os pontos $P(4;2;2)$, $F(4;0;5)$ e $H(-5;6;0)$ que contém, respetivamente, as retas i , i' e i'' , paralelas à reta i do exercício 34.

Determinar os traços dos planos α , π e β que se cruzam segundo essas retas.

Interseção de três planos (Continuação)

37. Determinar as retas i , i' e i'' , assim como o ponto I , onde se cruzam, resultantes da interseção entre os planos:

- ω , cujos traços frontal e horizontal têm 6cm de cota e 4cm de afastamento;
- σ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$ e que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 45° ae;
- ρ , de topo, que faz 35° ad e cruza o eixo x num ponto com 5cm de abcissa.

38. Determinar as retas i , i' e i'' , assim como o ponto I , onde se cruzam, resultantes da interseção entre os planos:

- ω , do exercício anterior;
- ρ , do exercício anterior;
- θ , cujos traços têm 3cm de cota e 7cm de afastamento.

39. Determinar as retas i , i' e i'' , assim como o ponto I , onde se cruzam, resultantes da interseção entre os planos:

- θ , do exercício anterior;
- φ , frontal, com 4cm de afastamento;
- π , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, que cruza o eixo x num ponto com -5cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 40° ae.

Interseção de retas com planos projetantes

40. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- δ , de topo, que faz 55° ae;
- a , fronto-horizontal, cujas projeções frontal e horizontal têm -5cm de cota e 2cm de afastamento.

41. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- π , vertical, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa e faz 40° ad;
- r , do $\beta_{2/4}$, passante no ponto com -3cm de abcissa, fazendo a sua projeção frontal 45° ad.

42. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- ω , horizontal, com -2cm de cota;
- v , vertical, com 4cm de afastamento.

43. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- φ , frontal, com -2cm de cota;
- p , de perfil, cujos traços são $F(3;0;-2)$ e $H(3;3;0)$.

Interseção de retas com planos não projetantes

44. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- β , cujos traços fazem ambos 40° ae;
- a , fronto-horizontal, cujas projeções têm 1cm de afastamento e -3cm de cota.

45. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- β , do exercício anterior;
- b , fronto-horizontal do $\beta_{2/4}$, com 3cm de cota.

46. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- π , que cruza o eixo x num ponto com 4cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 65° ae e 45° ad;
- f , frontal, com traço em $H(6;3;0)$, fazendo 40° ad.

47. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- π , do exercício anterior;
- r , passante num ponto com -1cm de afastamento, contendo o ponto $A(8;4;3)$.

48. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- π , do exercício 46;
- v , vertical com 3cm de cota e 1cm de abcissa.

49. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- α , que cruza o eixo x num ponto com 6cm de abcissa, fazendo o seus traços frontal e horizontal, 40° ad e 55° ad, respetivamente;
- s , que contém os pontos $A(2;2;1)$ e $B(2;-2;-5)$.

50. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- ω , cujos traços têm -5cm de cota e 2cm de afastamento;
- t , de topo, com 4cm de cota.

51. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- ω , do exercício anterior;
- n , horizontal, com -2cm de cota, fazendo 60° ae.

52. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- β , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço frontal tem 2cm de cota;
- r , paralela ao $\beta_{2/4}$, que contém o ponto $P(4;1)$, fazendo a sua projeção frontal 50° ad.

53. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- β , do exercício anterior;
- p , cujos traços são $F(3;0;3)$ e $H(3;-7;0)$.

Interseção de retas com planos definidos por retas ou pontos

54. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- a , fronto-horizontal, com 2cm de cota e 3cm de afastamento;
- p , definido pelas retas paralelas r e s , contendo r o ponto $R(2;2;1)$ e s o ponto $S(-5;7;3)$, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 45° ad e 60° ad, respetivamente.

55. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- b , que contém o ponto $B(-2;4;3)$ fazendo as suas projeções frontal e horizontal 50° ae e 40° ad, respetivamente;
- ρ , do exercício anterior.

56. Determinar o ponto I , de interseção entre:

- v , vertical, com abcissa nula e 3cm de afastamento;
- p , do exercício 54.

Interseção de retas com planos definidos por retas ou pontos (Continuação)

57. Determinar o ponto I, de interseção entre:
- r, que contém o ponto A(-3;6;4), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 35°ad e 50°ad, respetivamente;
 - π , definido pelas retas a e b, concorrentes no ponto P(4;5;2), sendo a frontal fazendo 40°ae e b oblíqua paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projeção frontal 50°ad.
58. Determinar o ponto I, de interseção entre:
- p, de perfil, passante, contendo o ponto S(2;6;5);
 - π , do exercício anterior.
59. Determinar o ponto I, de interseção entre:
- r, passante num ponto de abcissa nula e contendo o ponto M(6;5;6);
 - α , definido pelos pontos A(4;5;2), B(1;2;5) e C(-3;6;4).
60. Determinar o ponto I, de interseção entre:
- t, de topo, com 2cm de abcissa e 4cm de cota;
 - α , do exercício anterior.

61. Determinar o ponto I, de interseção entre:
- s, fronto-horizontal, que contém P(-3;2;4);
 - ω , definido pela reta d_{ω} , que contém o ponto D(0;3;2), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 35°ad e 60°ae, respetivamente.

Interseção de planos definidos pelos traços com planos definidos por retas ou pontos

62. Determinar a reta i, de interseção entre:
- β , que cruza o eixo x num ponto com 5cm de abcissa fazendo os seus traços frontal e horizontal 45°ad e 55°ad;
 - α , do exercício 59.
63. Determinar a reta i, de interseção entre:
- θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, que cruza o eixo x num ponto com -4cm de abcissa, fazendo a sua projeção frontal 50°ae;
 - ρ , definido pelos pontos A(3;4;2), B(0;2;1) e C(0;7;4).
64. Determinar a reta i, de interseção entre:
- π , vertical, que cruza o eixo x num ponto com -4cm de abcissa e faz 40°ae;
 - δ , definido pelos pontos P(6;-6;-3), Q(4;-1;-5) e R(2;-5;-1).
65. Determinar a reta i, de interseção entre:
- π , perpendicular ao $\beta_{1/3}$, cruzando o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo o seu traço frontal 40°ae;
 - θ , passante, definido pela reta fronto-horizontal a, com 3cm de cota e 4cm de afastamento.

Interseção entre planos definidos por retas ou pontos

66. Determinar a reta i, de interseção entre:
- α , definido por A(1;5;1), B(4;2;4) e C(7;2;2);
 - π , definido por D(-4;5;2), E(-8;3;1) e F(-2;0;5).
67. Determinar a reta i, de interseção entre:
- α , do exercício anterior;
 - β , passante contendo o ponto P(-3;2;4).
68. Determinar a reta i, de interseção entre:
- π , do exercício 66;
 - θ , definido pela reta i_{θ} , que contém os pontos P(3;5;1) e Q(6;1;4).
69. Determinar a reta i, de interseção entre:
- θ , do exercício anterior;
 - ω , definido pelas retas fronto-horizontais, a e b, contendo os pontos A(-3;2;4) e B(-5;4;1), respetivamente.
70. Determinar a reta i, de interseção entre:
- ω , do exercício anterior;
 - ρ , passante, contendo a reta fronto-horizontal, com 1cm de afastamento e -3cm de cota.
71. Determinar a reta i, de interseção entre:
- δ , definido por d_{δ} , que contém o ponto P(5;3;4), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 45°ad e 35°ae, respetivamente;
 - σ , definido por i_{σ} , que contém o ponto R(-4;3;5), fazendo as suas projeções frontal e horizontal 35°ad e 50°ae, respetivamente.
72. Determinar a reta i, de interseção entre:
- α , definido pelas retas r e s, concorrentes no ponto P(5;5;3), fazendo as projeções frontal e horizontal de r 50°ae e 65°ad, respetivamente, e sendo s frontal fazendo 50°ad;
 - β , definido pelas retas a e b, paralelas entre si e paralelas ao $\beta_{2/4}$, contendo os pontos A(-2;7;2) e B(-5;3;2), respetivamente, e fazendo as suas projeções frontais 60°ae.
73. Determinar a reta i, de interseção entre:
- β , do exercício anterior;
 - π , que contém as retas fronto-horizontais m e n, que contém os pontos M(6;-2;2) e N(4;7;5).
74. Determinar a reta i, de interseção entre:
- π , do exercício anterior;
 - θ , passante, contendo o ponto P(0;2;2)
75. Determinar a reta i, de interseção entre os planos de rampa:
- ψ , que contém os pontos A(4;-3;-1) e B(2;3;-4);
 - ρ , que contém os pontos C(0;-1;6) e D(-2;3;1).