

4

MÉTODOS AUXILIARES

Os métodos auxiliares são processos que permitem alterar a posição das figuras geométricas. Aqui mostra-se como se aplicam a pontos, segmentos de reta, retas e planos. É bastante útil a aplicação destes métodos principalmente no estudo de Figuras Planas, Paralelismos, Perpendicularidades, Distâncias e Ângulos. Por extensão, acabam também por se aplicar em Sólidos e em Sombras.

Sumário:

2, 3 e 4. Rebatimento de planos projetantes

5 e 6. Rebatimento do plano oblíquo

7 e 8. Rebatimento do plano de rampa

9, 10 e 11. Rebatimento de planos definidos por retas concorrentes

12. Rebatimento de planos definidos por retas concorrentes, utilizando uma delas como charneira

13 e 14. Rebatimento de planos definidos por retas paralelas

15. Rebatimento de planos definidos por retas paralelas, utilizando uma delas como charneira

16, 17, 18 e 19. Rotação de retas e segmentos de reta

20 e 21. Rotação de planos

22 e 23. Rotação de planos definidos por retas

24, 25 e 26. Mudanças de planos aplicadas a retas e segmentos de reta

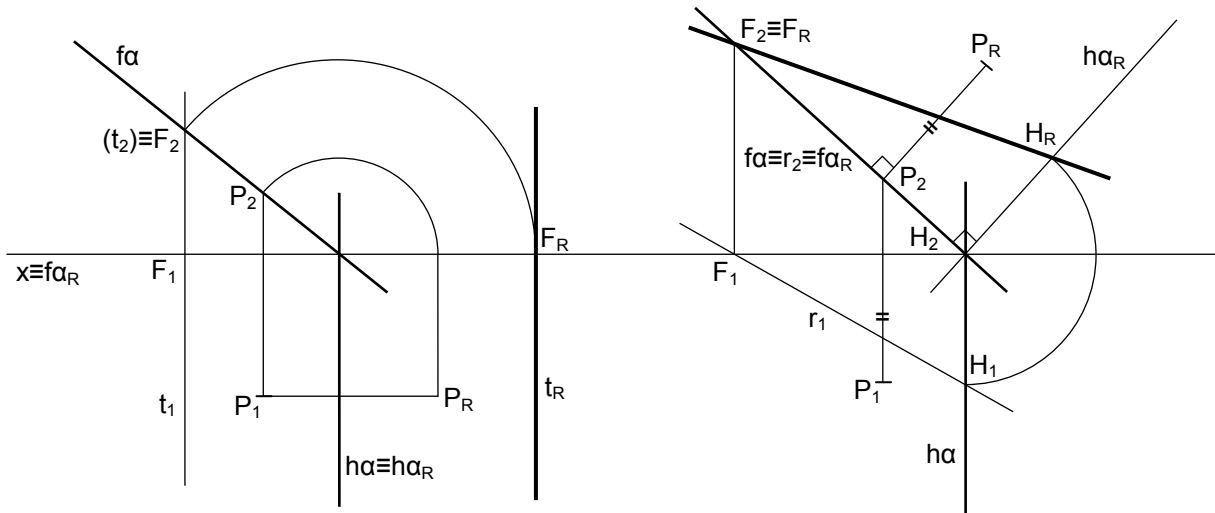
27 e 28. Mudanças de planos aplicadas a planos

29 e 30. Mudanças de planos aplicadas a planos definidos por retas

31, 32, 33 e 34. Exercícios

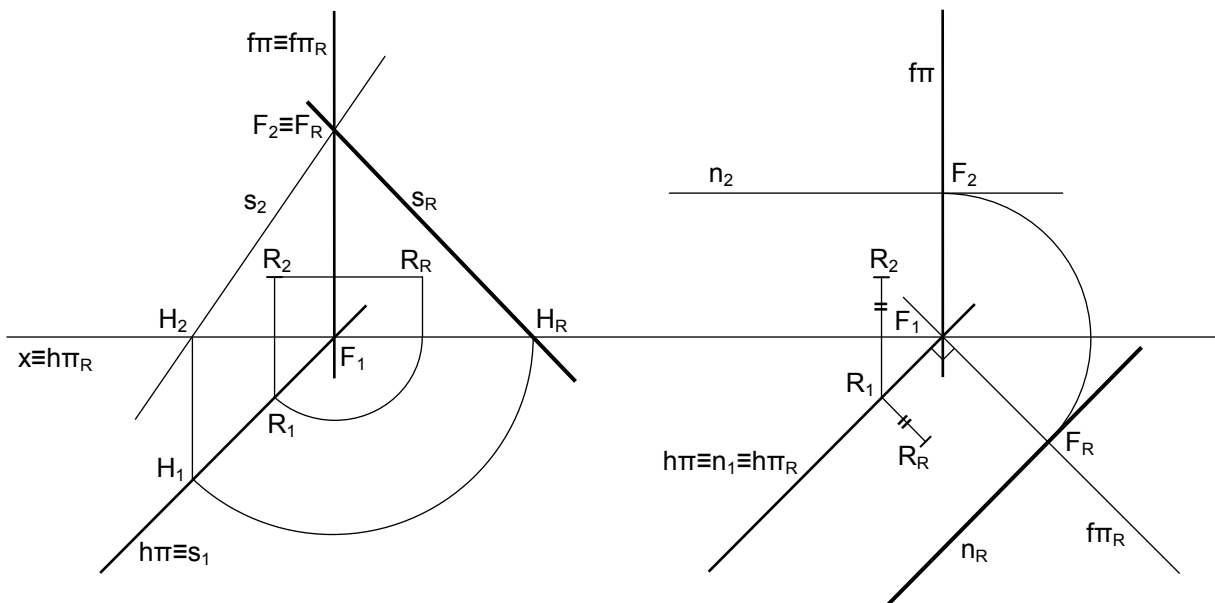
Rebatimento de planos projetantes

Ao rebater um plano, este vai coincidir (ou ficar paralelo) a um plano de projeção, para que as figuras nele existentes fiquem em verdadeira grandeza, ou seja, com o tamanho e a forma reais, sem as deformações provocadas pelas projeções. As figuras situadas nos planos frontal e horizontal estão sempre em verdadeira grandeza numa das projeções, não sendo necessário rebatê-los.



Rebatimento do plano de topo

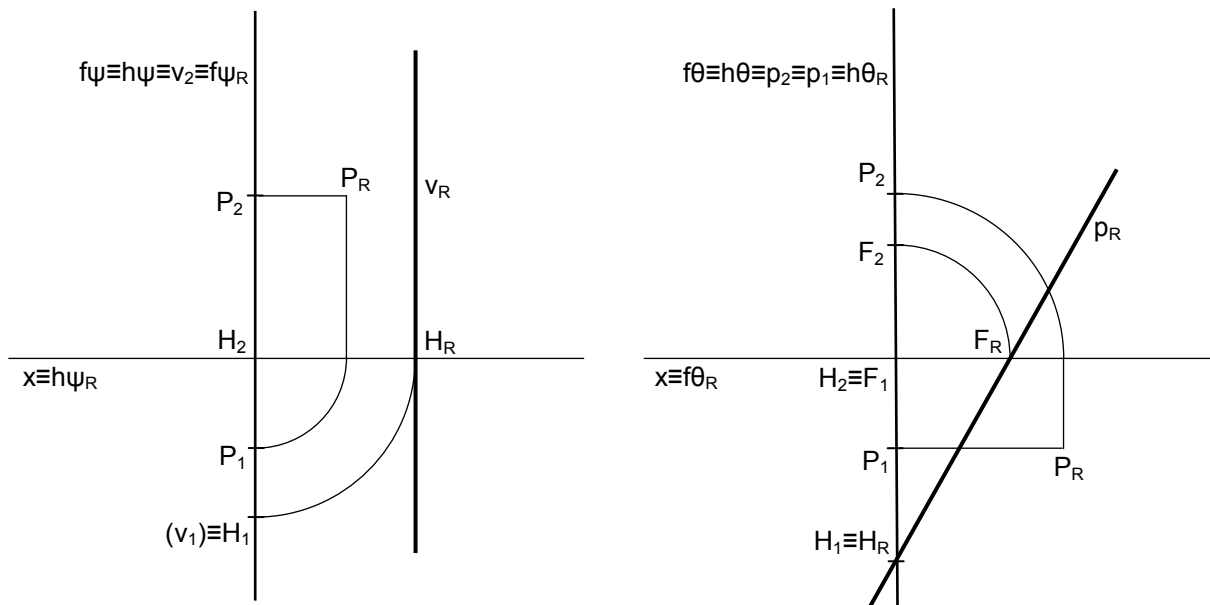
À esquerda temos o rebatimento do plano para o PHP, pelo que a charneira do rebatimento é o traço horizontal; o traço frontal rebatido fica coincidente com o eixo x . À direita o rebatimento é feito sobre o PFP, com charneira no traço frontal; o traço horizontal rebatido fica perpendicular ao frontal. Em ambos os casos mostra-se como rebate um ponto e uma reta do plano.



Rebatimento do plano vertical

Aqui temos também um rebatimento sobre o PFP e outro sobre o PHP. O traço fixo, ou charneira, é sempre o do plano de projeção sobre o qual o plano vai rebater. Também aqui um ponto e uma reta do plano o acompanham no rebatimento.

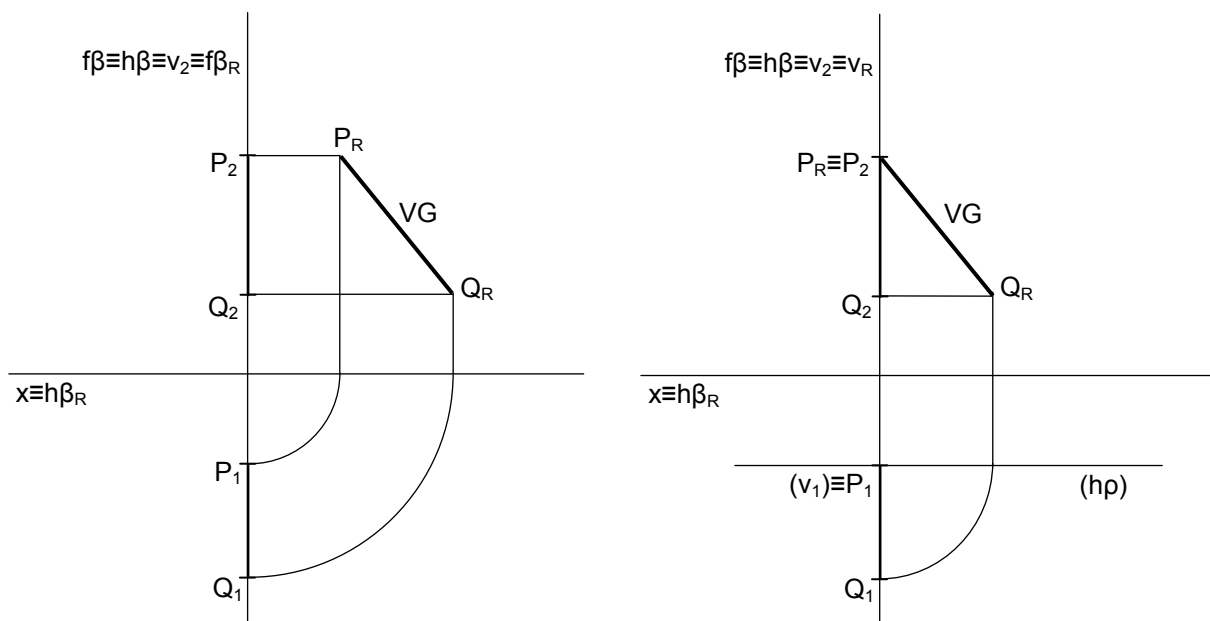
Nos exemplos de cima mostra-se o rebatimento do plano de perfil, levando consigo uma reta e um ponto. Em baixo mostra-se o rebatimento de um segmento de reta de perfil, o que permite determinar o seu tamanho real ou verdadeira grandeza (VG), processo que se emprega no capítulo Distâncias. À partida deve escolher-se rebater para o lado onde haja mais espaço livre.



Rebatimento do plano de perfil

À esquerda temos o rebatimento do plano para o PFP, pelo que a charneira do rebatimento é o traço frontal; o traço horizontal rebatido fica coincidente com o eixo x. Rebateu-se também o ponto P e uma reta vertical do plano.

À direita o rebatimento é feito sobre o PHP, com charneira no traço horizontal; o traço frontal rebatido vai coincidir com o eixo x. Rebate-se uma reta de perfil e o ponto P do plano.

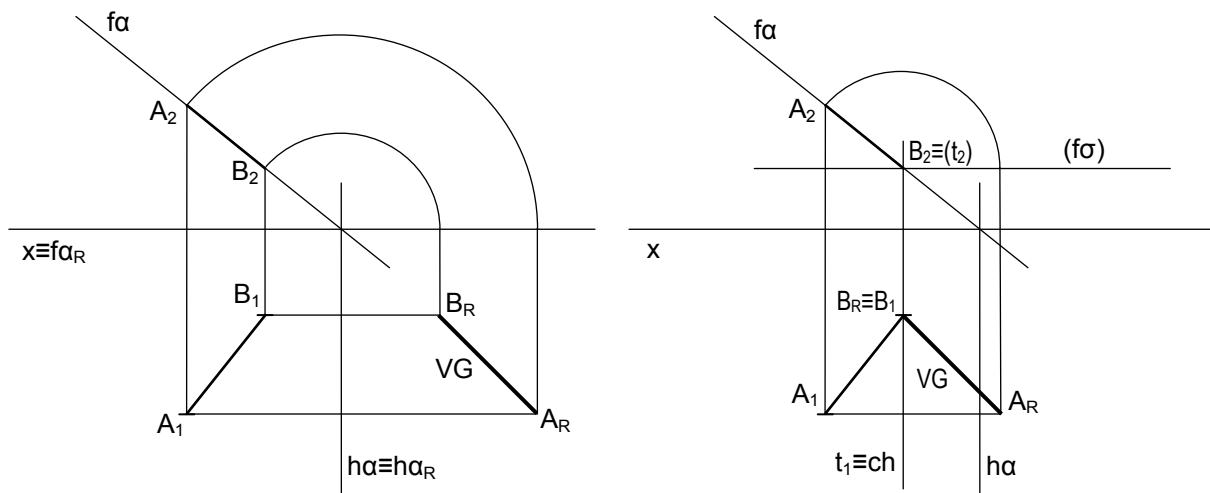


Rebatimentos para determinar a verdadeira grandeza de um segmento de reta de perfil

À esquerda rebate-se o plano de perfil que contém o segmento de reta [PQ] para o PFP, ficando [P_RQ_R] em verdadeira grandeza (VG).

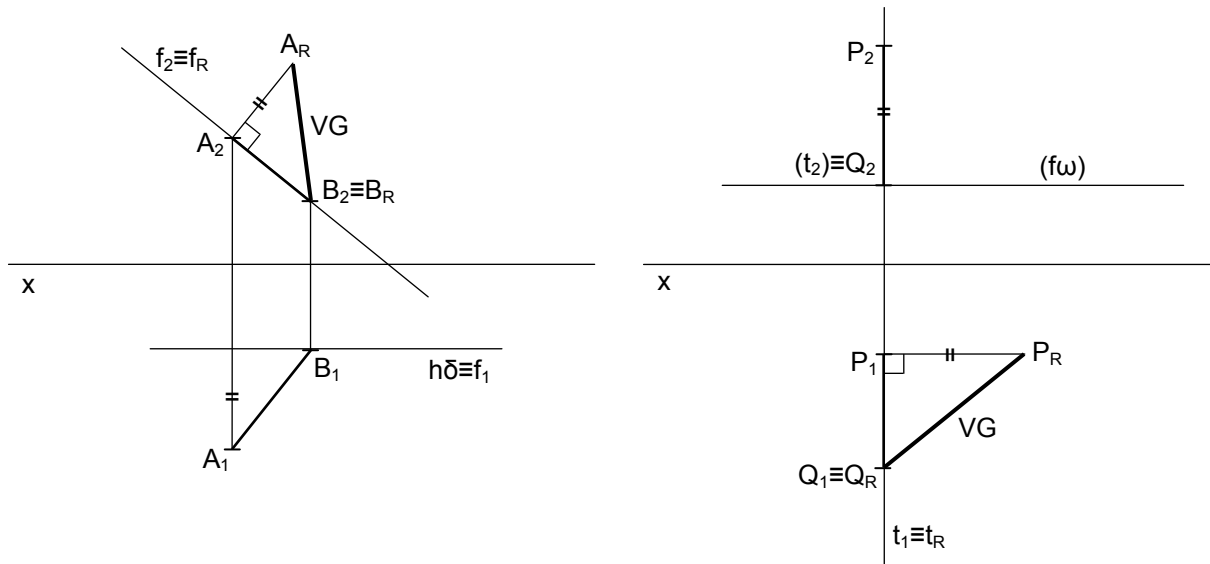
À direita faz-se um rebatimento sobre o plano frontal ρ , que contém o ponto P. Esse ponto fica fixo e apenas rebate o ponto Q. A charneira deste rebatimento é a reta vertical v.

Aqui mostra-se, em cima, rebatimentos que têm por objetivo determinar o tamanho real ou verdadeira grandeza (VG) de um segmento de reta oblíquo. Em baixo mostra-se rebatimentos simplificados para a achar a verdadeira grandeza dos segmentos oblíquo e de perfil. Estes processos empregam-se no capítulo Distâncias.



Rebatimentos para determinar a verdadeira grandeza de segmentos de reta oblíquos

À esquerda, o plano e o segmento de reta são rebatidos para o plano horizontal de projeção. À direita, o plano é rebatido para o plano horizontal σ , que contém o ponto B. Aqui o rebatimento é feito em torno da charneira de topo t , que contém o ponto B e por isso fica fixo.

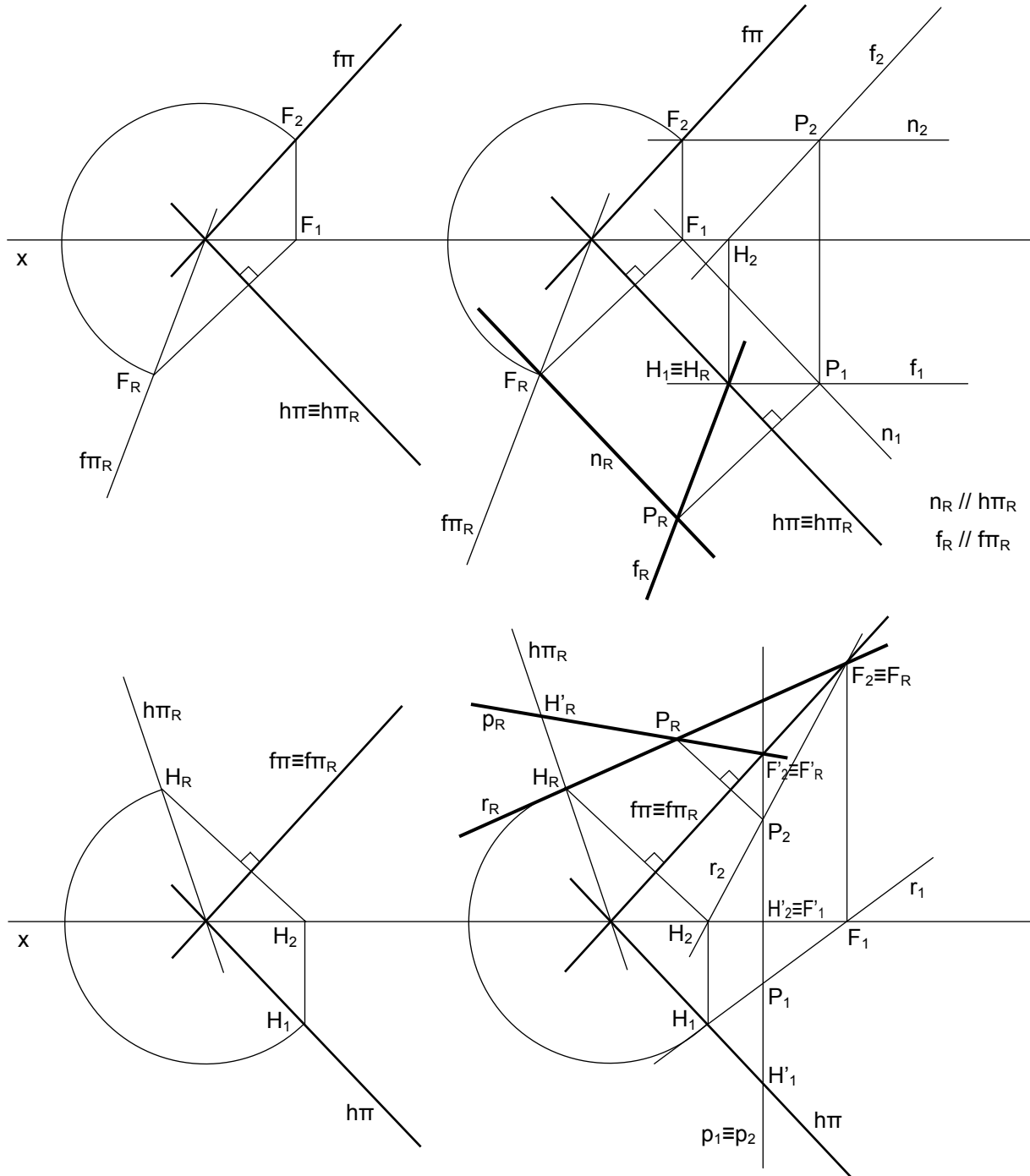


Rebatimentos simplificados para determinar a verdadeira grandeza dos segmentos de reta oblíquo e de perfil

À esquerda rebate-se o segmento de reta oblíquo para o plano frontal δ , em torno da charneira frontal f , que contém o ponto B. Para isso marca-se a medida $=$ na perpendicular à charneira. À direita faz-se um rebatimento do segmento de reta de perfil sobre o plano horizontal ω , em torno da charneira de topo t , que contém o ponto Q. Marca-se a medida $=$ na perpendicular à charneira. Neste processo simplificado não é necessário indicar um plano contendo o segmento, mas apenas o plano (horizontal ou frontal) sobre o qual o segmento é rebatido.

Rebatimento do plano oblíquo

Também aqui se utiliza um traço do plano como charneira, mas é necessário um ponto auxiliar situa- do no traço móvel. Se esse ponto não existir no enunciado do exercício, deve ser acrescentado.



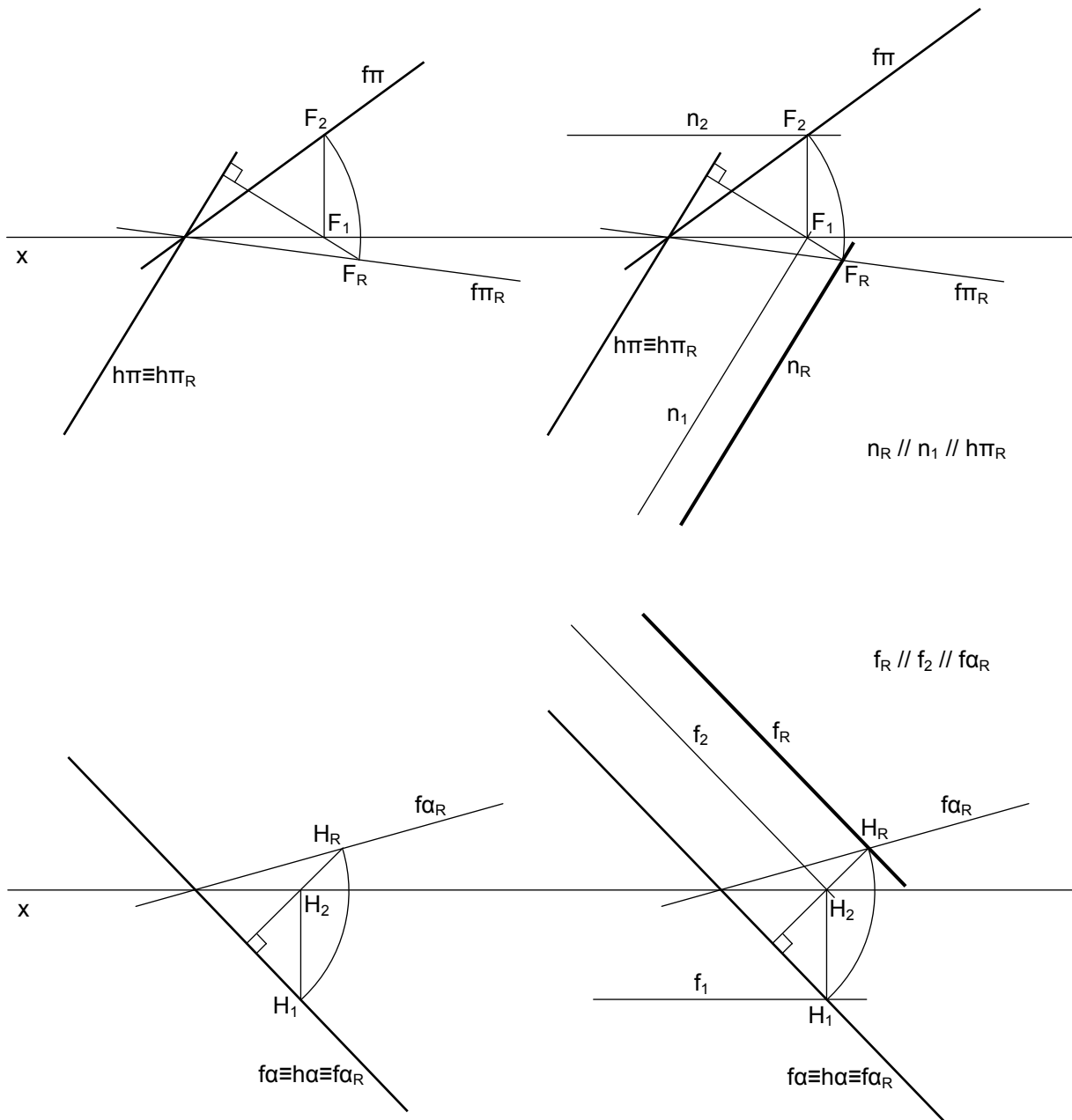
Rebatimento do plano oblíquo

No exemplo de cima rebatete-se o plano para o PHP; como tal, a charneira é o traço horizontal, sendo móvel o traço frontal. Foi com o ponto F que se executou rebatimento.

No caso de baixo o plano rebatete-se para o PFP, pelo que é o traço frontal o fixo, sendo móvel o horizontal. O rebatimento foi feito com ajuda do ponto H.

À esquerda destaca-se apenas o rebatimento do plano; à direita rebatem-se também duas retas e o ponto onde se cruzam. De notar que os pontos se deslocam na perpendicular à charneira.

Aqui mostra-se o rebatimento de planos oblíquos cujos traços têm aberturas para lados contrários. Trata-se de exemplos que apresentam diferenças ligeiras em relação aos da página anterior.

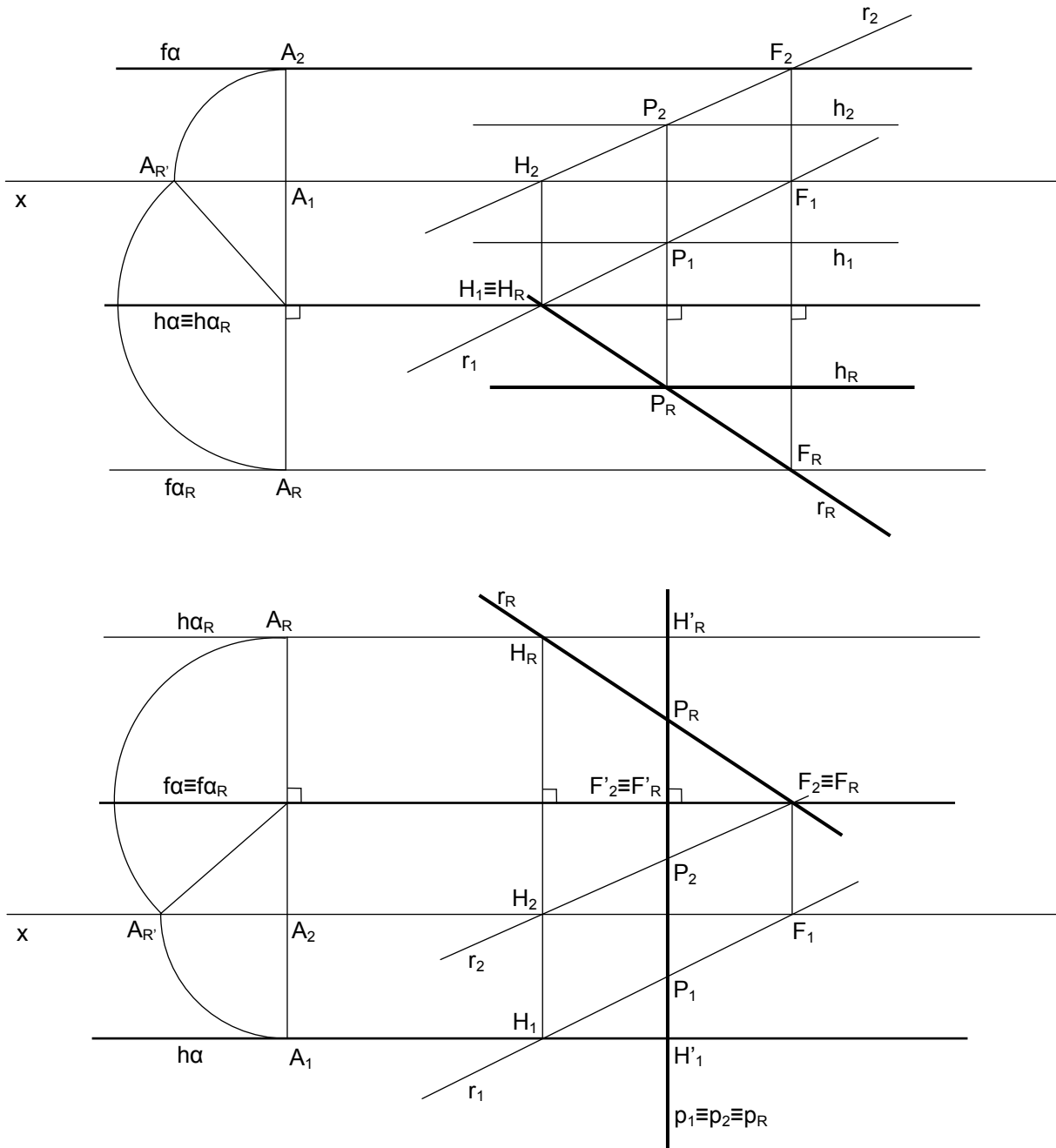


Rebatimento do plano oblíquo com traços abertos para lados contrários

Em cima temos um plano comum, com os traços abertos para lados contrários, a rebater para o PHP. Em baixo temos um plano perpendicular ao $\beta_{2/4}$ a rebater para o PFP. Dentro de cada plano rebate também uma reta, horizontal no primeiro caso, frontal no segundo. Compare-se a aplicação do ponto auxiliar entre estes casos e os da página anterior.

Rebatimento do plano de rampa

Para rebater, tal como sucede com o plano oblíquo, o plano de rampa necessita de um ponto auxiliar situado no traço móvel. Contudo, esse ponto precisa de um rebatimento auxiliar, como veremos.



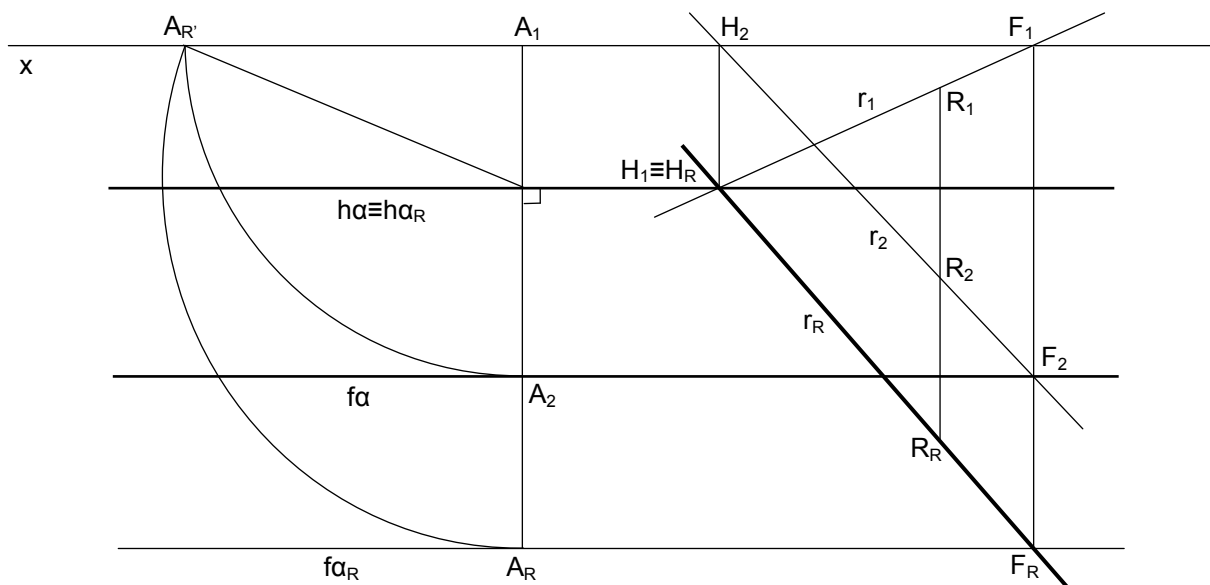
Rebatimento do plano de rampa

No primeiro exemplo rebate-se o plano para o PHP; como tal, a charneira é o traço horizontal, sendo móvel o traço frontal. Rebate-se também uma reta oblíqua, outra fronto-horizontal e o ponto P que lhes pertence.

No segundo caso o plano é rebatido para o PFP, pelo que é fixo o traço frontal e móvel o horizontal. Rebate-se aqui uma reta oblíqua e uma de perfil. Também aqui o ponto P é a intersecção dessas retas.

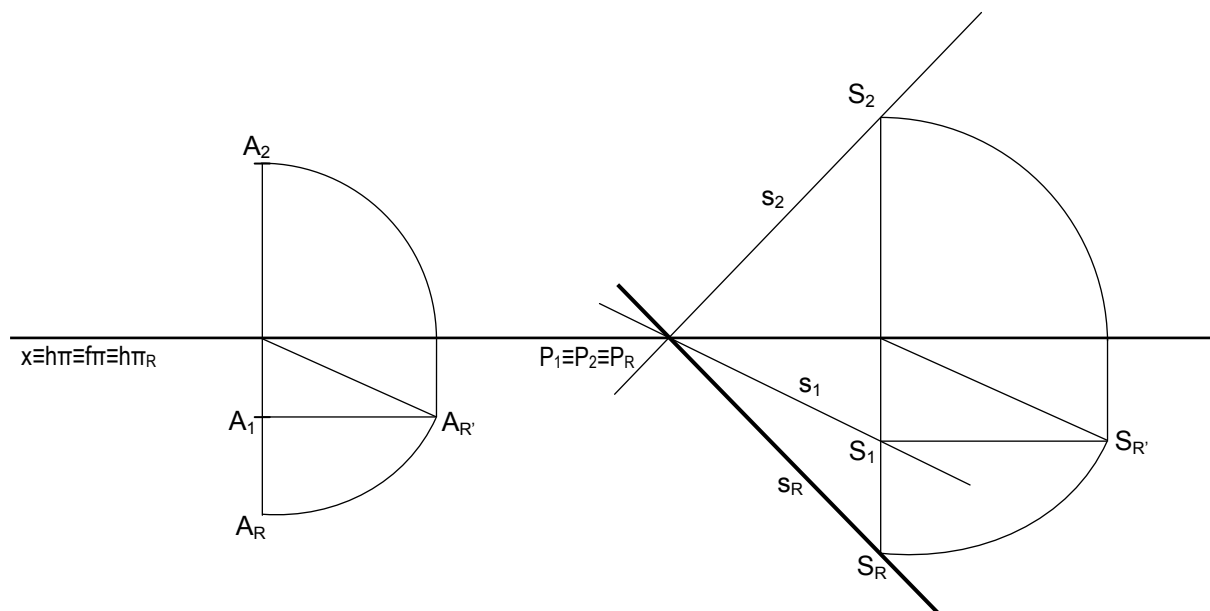
À esquerda faz-se o rebatimento auxiliar do ponto A, o que permite saber a distância real entre os dois traços, fundamental para determinar o rebatimento do plano. De facto, esse ponto passa por dois rebatimentos: um para o lado, que dá A_R ; outro para baixo ou para cima que dá o ponto A_R .

Aqui vemos o rebatimento de outros planos de rampa, o primeiro com os traços para o mesmo lado do eixo x, o segundo passante.



Rebatimento do plano de rampa com os traços para o mesmo lado do eixo x

Aqui vemos o rebatimento de um plano de rampa com os dois traços para baixo do eixo x. Rebate-se também uma reta oblíqua do plano e o ponto R que nela existe. Este rebatimento é feito para o PHP. Compare-se o traçado deste exercício com os da página anterior.

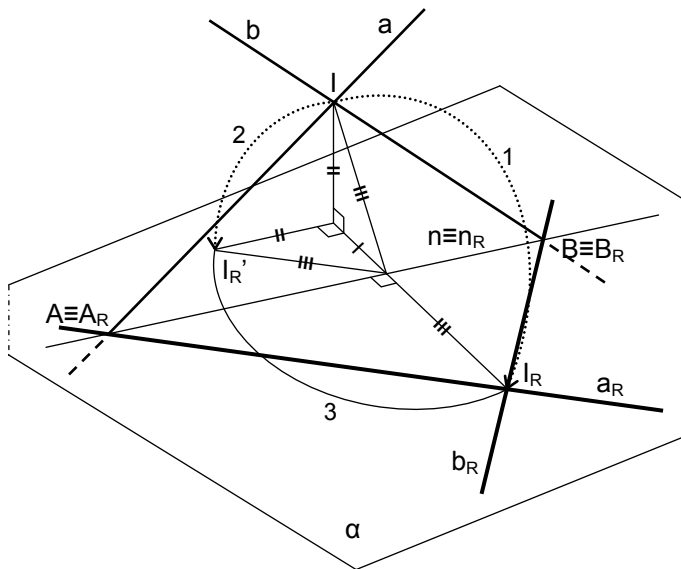


Rebatimento do plano passante

Como os traços do plano passante estão no eixo x, que serve se charneira, o ponto auxiliar não pode estar situado num traço, pois isso de nada serviria para o rebatimento. Com o rebatimento do ponto A considera-se que o plano está rebatido, neste caso para o PHP. Como nos outros planos de rampa, o ponto faz primeiro um rebatimento auxiliar. Para rebater uma reta oblíqua, passante no ponto P, usa-se um ponto dessa reta. Os triângulos que resultam do rebatimento auxiliar de cada ponto são proporcionais, ou seja, têm hipotenusas paralelas. Isso prova que os pontos A e S, assim como a reta s, se situam no plano.

Rebatimento de planos definidos por retas concorrentes

Normalmente, rebate-se os planos definidos pelos traços sobre os planos de projeção, rebatendo-se os planos definidos por retas sobre planos horizontais ou frontais. O processo aqui utilizado designa-se por processo do triângulo do rebatimento. Para que possa devidamente compreendido, mostra-se aqui uma representação em perspectiva, assim como a que lhe corresponde nas projeções. Este processo é muito útil para determinar a verdadeira grandeza do ângulo entre duas retas.

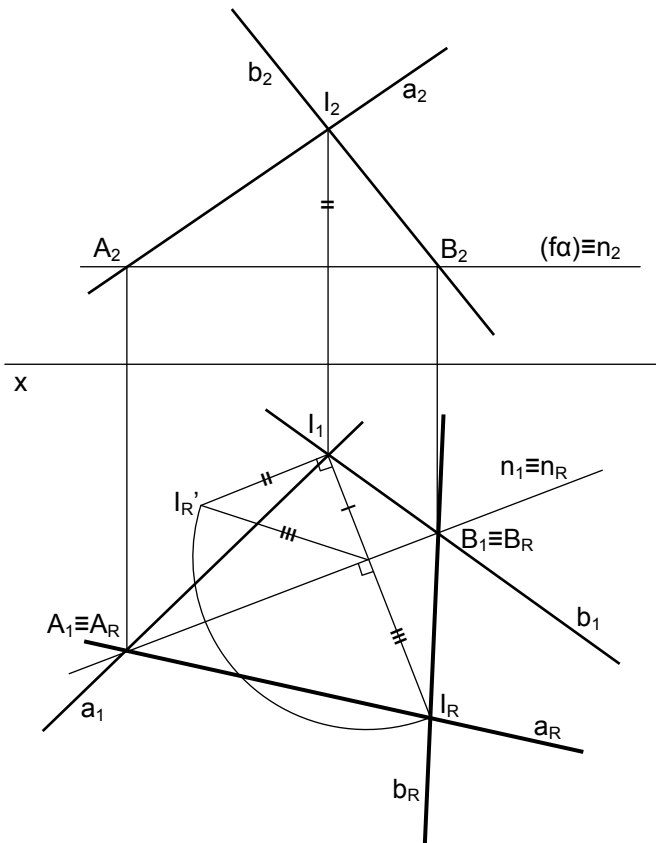


Rebatimento de um plano definido por duas retas oblíquas, no espaço

Exemplifica-se aqui o rebatimento das retas para um plano horizontal, em perspectiva.

As retas a e b cruzam o plano α nos pontos A e B , que definem a reta horizontal n , charneira do rebatimento. O ponto de interseção I roda num movimento circular perpendicular à charneira, os pontos A e B permanecem fixos. Nas projeções (como se observa na imagem abaixo) temos acesso às medidas $-e =$, mas não temos acesso direto à medida \equiv , que corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são as medidas $-e =$.

Os arcos indicados com algarismos significam: 1- Movimento real do ponto I durante o rebatimento; 2- Rebatimento auxiliar do ponto I , para determinar o triângulo rebatido; 3- Deslocação da medida da hipotenusa. Os arcos 1 e 2 não têm representação na imagem de baixo.



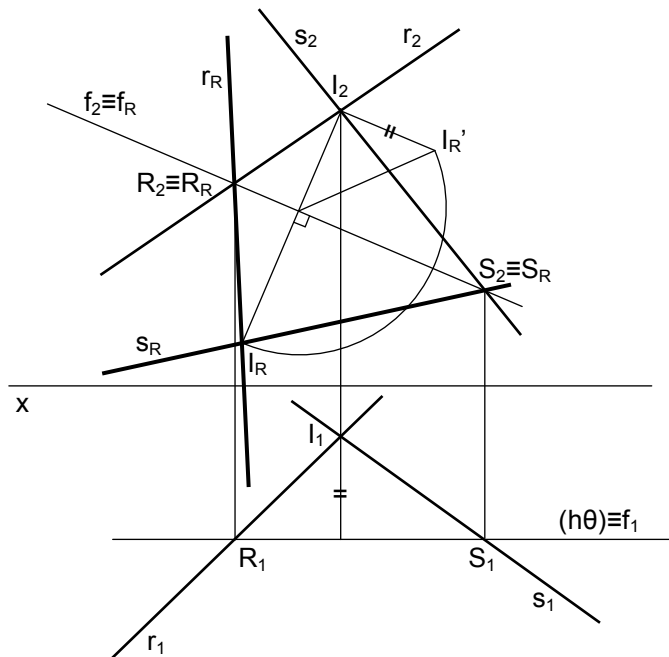
Rebatimento de um plano definido por duas retas oblíquas, nas projeções

Este traçado mostra a situação anterior, em projeções. Proceda-se do seguinte modo:

1. Traça-se o plano horizontal α , que cruza as retas a e b nos pontos A e B ;
2. Os pontos A e B definem a reta horizontal n , que é a charneira do rebatimento;
3. A partir do ponto I_1 traça-se uma paralela e uma perpendicular à charneira;
4. Na paralela marca-se a distância entre o ponto I e o plano α , de onde se obtém o ponto I_R' (rebatimento auxiliar);
5. Constrói-se o triângulo do rebatimento e desloca-se a medida da hipotenusa para a perpendicular à charneira, onde se obtém o ponto I_R .
6. Unindo o ponto I_R aos pontos A_R e B_R obtêm-se as retas rebatidas a_R e b_R , que correspondem ao plano que elas definem já rebatido.

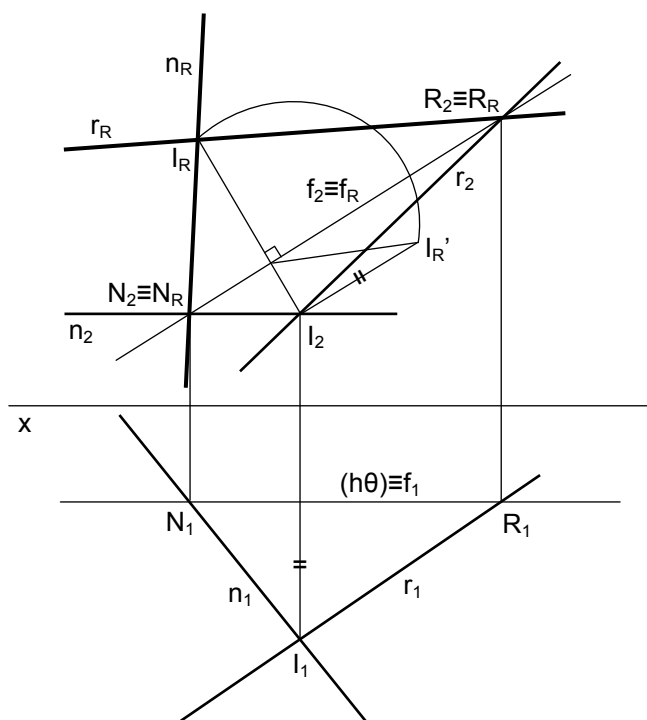
Surgem aqui indicadas as medidas $-$, $=$ e \equiv para que se possa comparar melhor este traçado com o da perspectiva; na prática dos exercícios indicar-se-á apenas a medida $=$.

Mostram-se aqui mais exemplos de rebatimentos de planos definidos por retas concorrentes, rebatimentos esses que se fazem quer sobre um plano frontal quer sobre um plano horizontal.



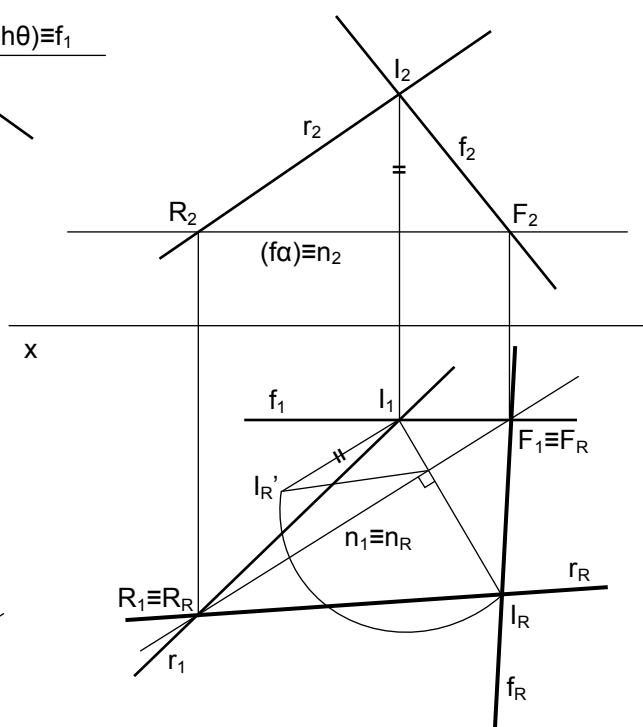
Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma frontal

Na situação que se apresenta à direita o rebatimento é feito sobre um plano horizontal, em torno duma charneira horizontal.



Rebatimento de um plano definido por duas retas oblíquas

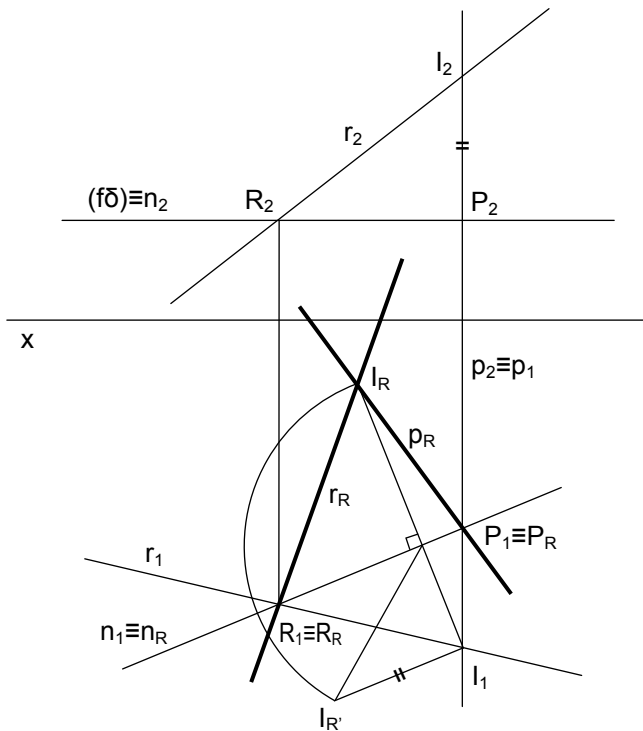
As duas retas que aqui se rebatem são as mesmas do exercício da página anterior, contudo aqui são rebatidas sobre um plano frontal, em torno de uma charneira frontal. Ao invés do que aconteceu no exercício anterior, obviamente aqui o triângulo do rebatimento é traçado na projeção frontal.



Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma horizontal

À esquerda rebate-se o plano definido pelas retas sobre um plano frontal, em torno duma charneira frontal.

Aqui observam-se mais exemplos, onde também o rebatimento de faz quer sobre um plano horizontal, quer sobre um frontal, plano esse que corta ambas as retas.

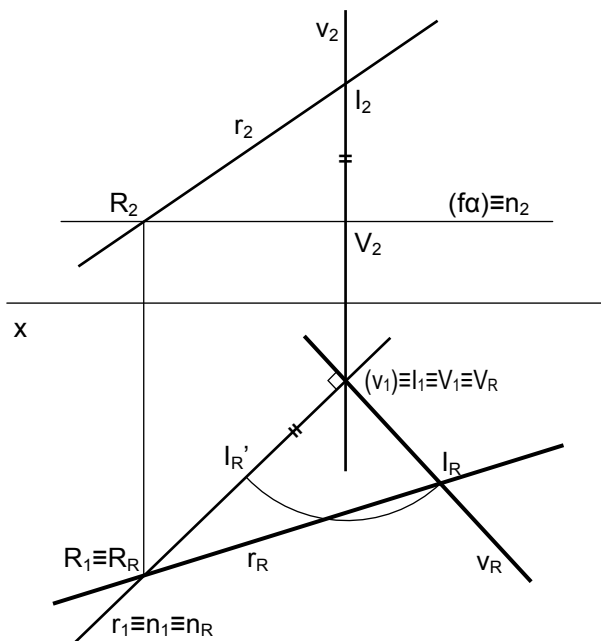
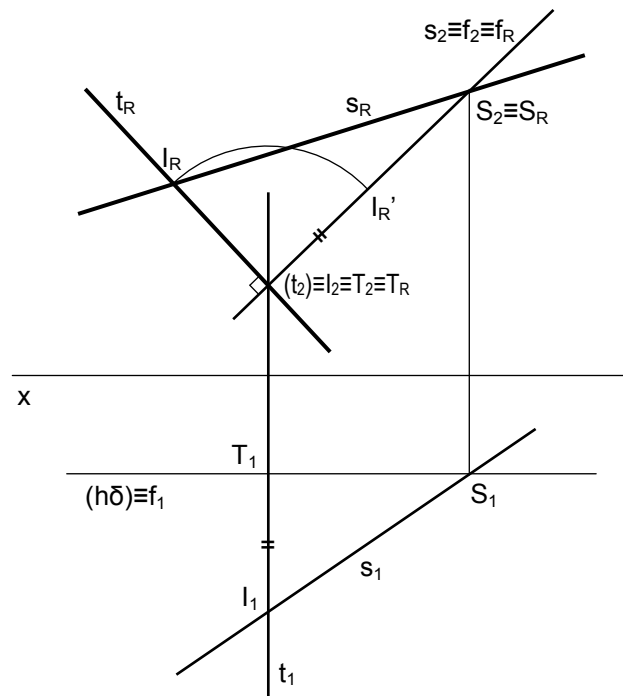


Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma de perfil

À partida, a reta de perfil está definida pelos pontos I e P, passando-se por este o plano horizontal sobre o qual é feito o rebatimento, em torno duma charneira horizontal.

Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma de topo

À direita, o rebatimento faz-se sobre um plano frontal e em torno duma reta frontal que, dadas as circunstâncias, tem a sua projeção frontal a coincidir com a da reta oblíqua. O triângulo do rebatimento reduz-se a um segmento de reta, dado que um dos catetos não existe.

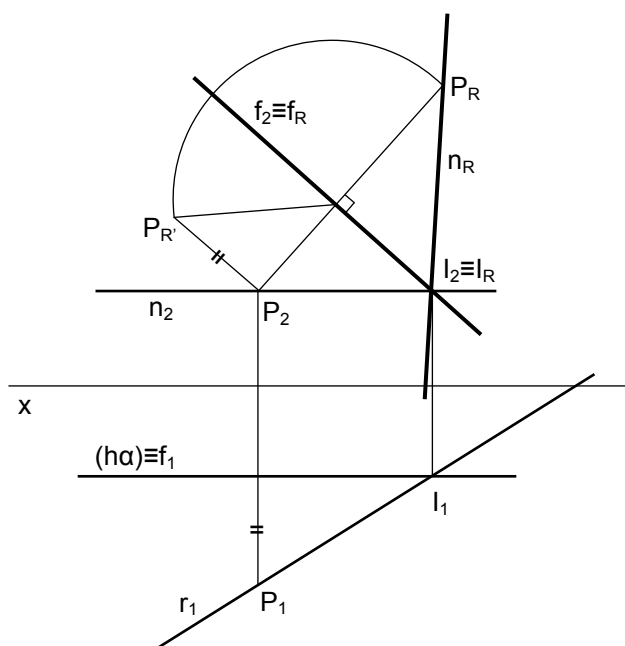


Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma vertical

Aqui temos uma situação idêntica à anterior, mas invertida. Ou seja, o rebatimento é feito para um plano horizontal e em torno de uma reta horizontal, cuja projeção desse nome coincide com a da reta oblíqua. De novo o triângulo do rebatimento fica reduzido a um segmento de reta.

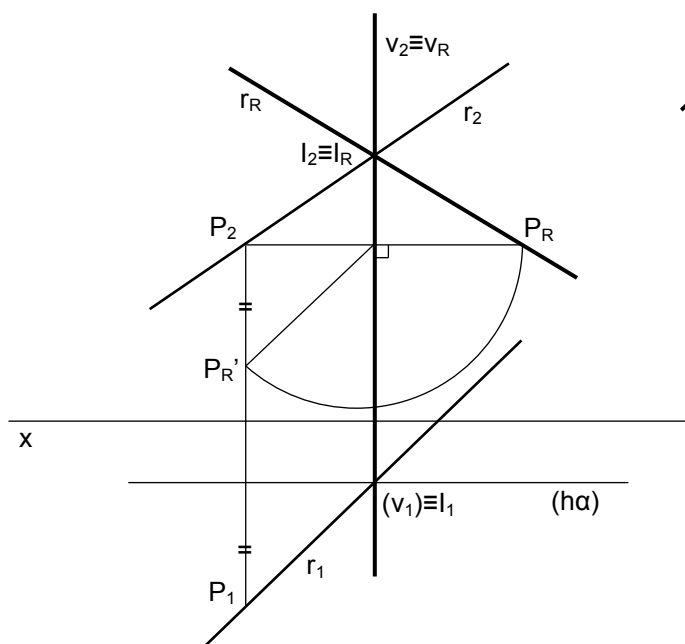
Rebatimento de planos definidos por retas concorrentes utilizando uma delas como charneira

Quando uma das retas que definem o plano é paralela a um dos planos de projeção pode ser utilizada como charneira, pelo que apenas a outra rebate. São esses os casos que aqui se mostram.



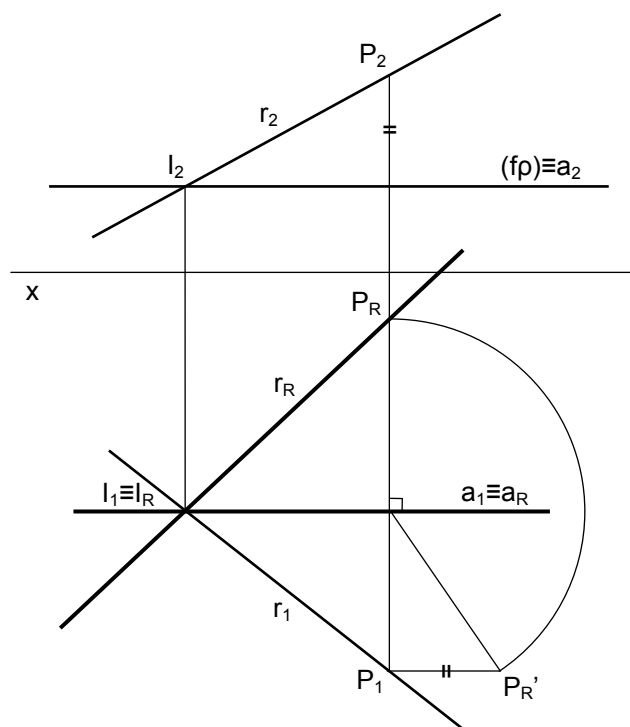
Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma fronto-horizontal

Aqui utiliza-se um plano horizontal, usando a reta fronto-horizontal como charneira, pelo que apenas a reta oblíqua, com ajuda do ponto P. Pode-se, de igual modo, fazer o rebatimento sobre um plano frontal, mantendo a mesma reta fronto-horizontal como charneira.



Rebatimento de um plano definido por uma reta frontal e uma horizontal

Aqui o rebatimento faz-se sobre um plano frontal, usando a reta frontal como charneira. Deste modo, apenas rebate a horizontal, com recurso ao ponto P, dado que l é fixo. Pode-se também rebater sobre um plano horizontal, utilizando a reta horizontal como charneira e um ponto da reta frontal.



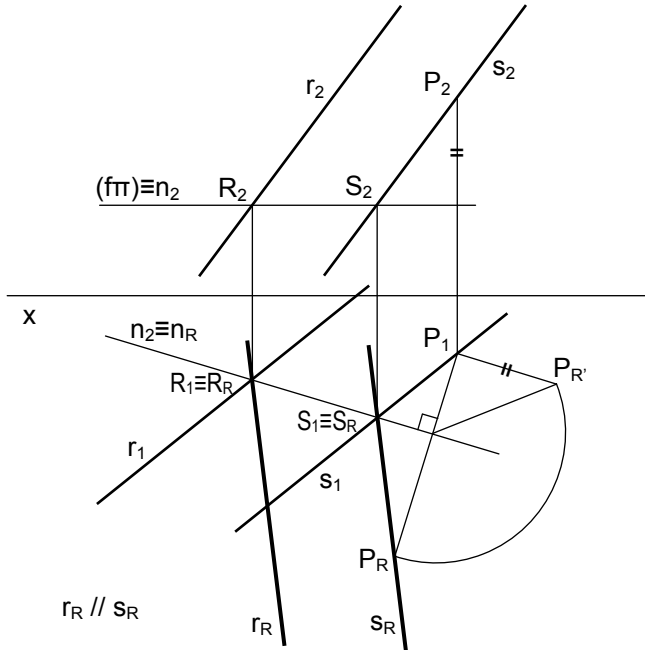
Rebatimento de um plano definido por uma reta oblíqua e uma vertical

Fazendo passar um plano frontal pela reta vertical, essa reta será utilizada como charneira do rebatimento, pelo que permanecerá fixa. Deste modo rebate-se apenas a reta oblíqua, utilizando para o efeito o ponto P. Sendo o plano definido por uma reta oblíqua e outra de topo, servirá esta de charneira.

Rebatimento de planos definidos por retas paralelas

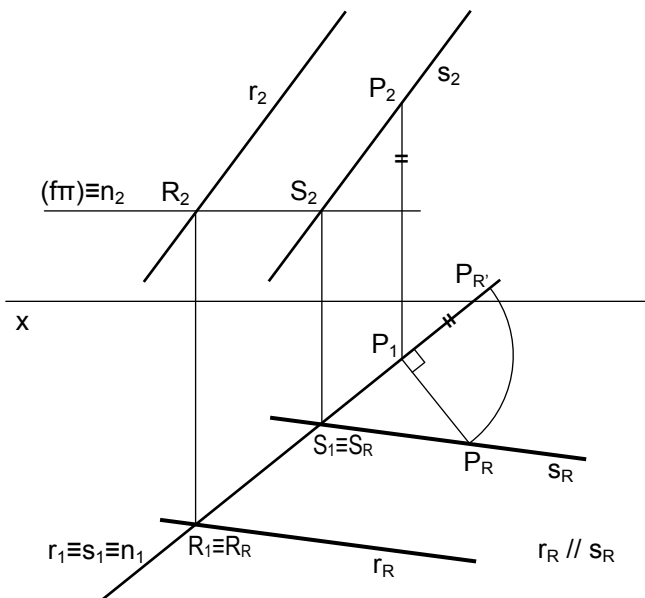
Duas retas concorrentes dão origem a diversas situações; paralelas não permitem tão grande variedade, contudo é igualmente importante rebater planos definidos por essas retas.

O rebatimento de retas paralelas tem especial importância no capítulo Distâncias, para a determinação da distância entre duas retas.



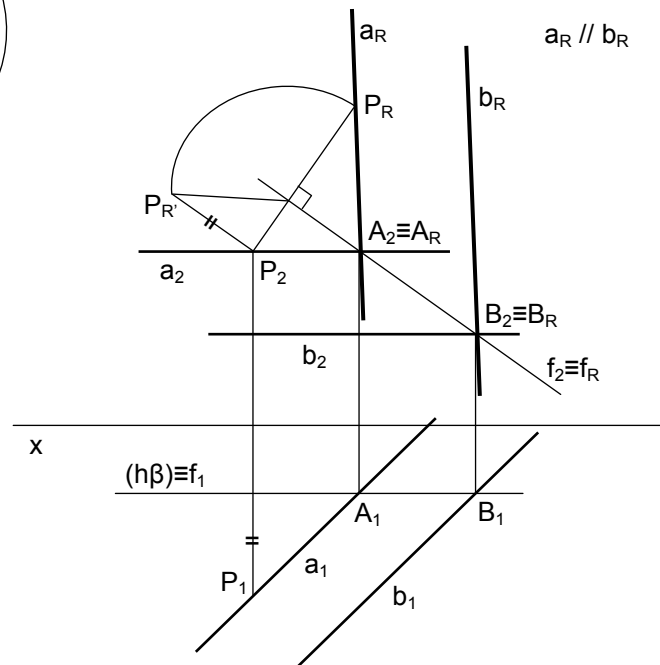
Rebatimento de um plano definido por duas retas horizontais

Este rebatimento é feito sobre um plano frontal, em torno de uma reta frontal. Começa-se por rebater uma das retas com a ajuda de um ponto seu. Rebatidas as retas continuam paralelas.



Rebatimento de um plano definido por duas retas oblíquas paralelas

Para rebater o plano definido por estas retas começa-se por rebater uma delas, aplicando o triângulo do rebatimento a um dos seus pontos. As retas rebatidas continuam paralelas. Este rebatimento foi feito para um plano horizontal, em torno de uma charneira horizontal.

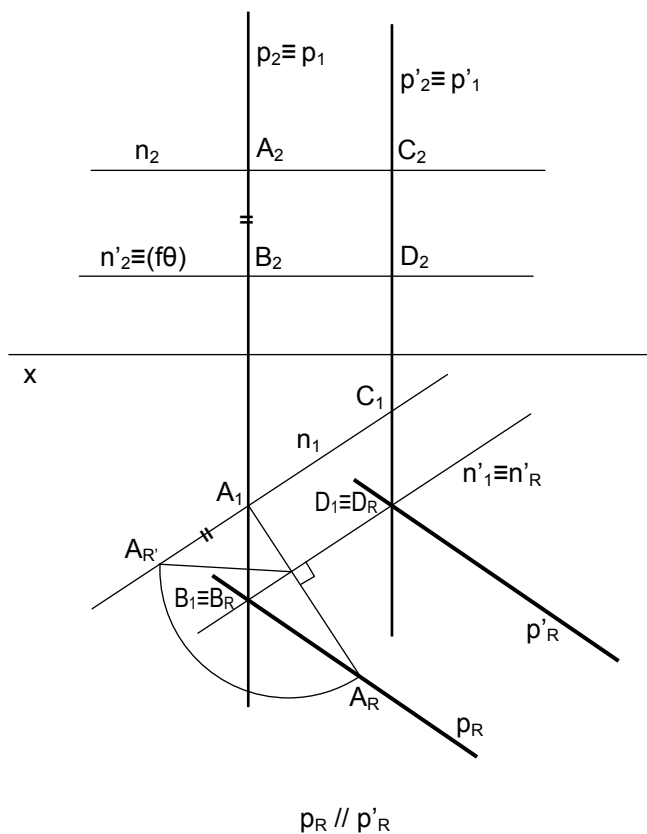


Rebatimento de um plano definido por duas retas oblíquas paralelas, com uma das projeções coincidentes

Esta situação é idêntica à primeira, mas aqui as projeções horizontais das retas são coincidentes. Rebatendo sobre um plano horizontal, a charneira será horizontal, ficando a sua projeção horizontal coincidente com as projeções homónimas das retas dadas.

De notar que aqui o triângulo do rebatimento se reduz a um segmento de reta. Se se tivesse optado por um plano frontal, surgiria uma charneira de topo.

Nesta página mostram-se mais dois casos, bem diferentes, de rebatimentos de planos definidos por retas paralelas.

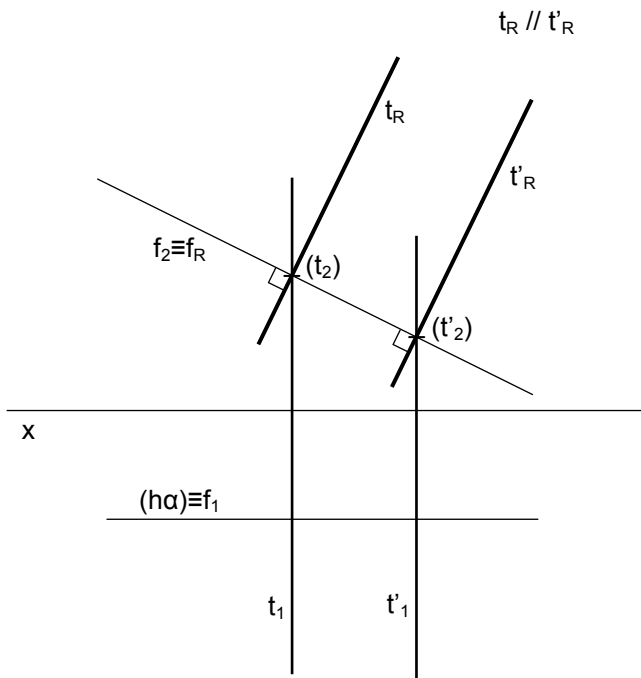


Rebatimento de um plano definido por duas retas de perfil

Para não complicar o traçado (levando, por exemplo, à utilização das projeções laterais), cruzam-se aqui com as retas de perfil duas retas horizontais paralelas entre si, provando que as retas de perfil também são paralelas. Deste modo, utiliza-se uma das retas horizontais como charneira.

Rebatimento de um plano definido por duas retas de topo

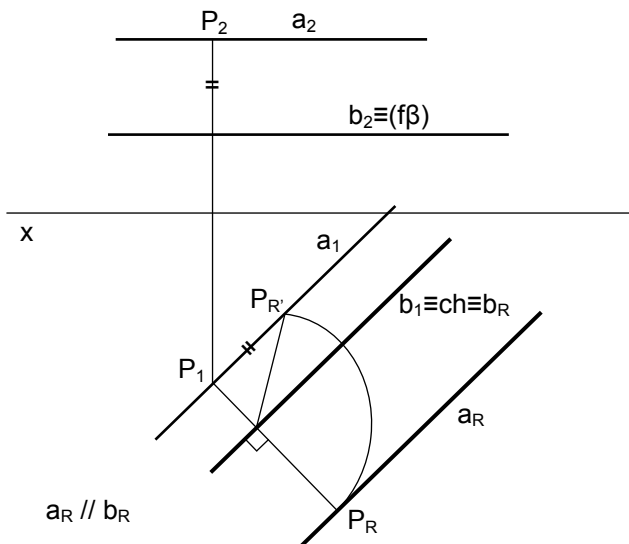
Para efetuar o rebatimento do plano definido por estas retas sobre um plano frontal basta colocá-las perpendiculares à charneira, a partir das suas projeções frontais. Dada a simplicidade destas situações, não é necessário utilizar qualquer ponto auxiliar.



Rebatimento de planos definidos por retas paralelas utilizando uma delas como charneira

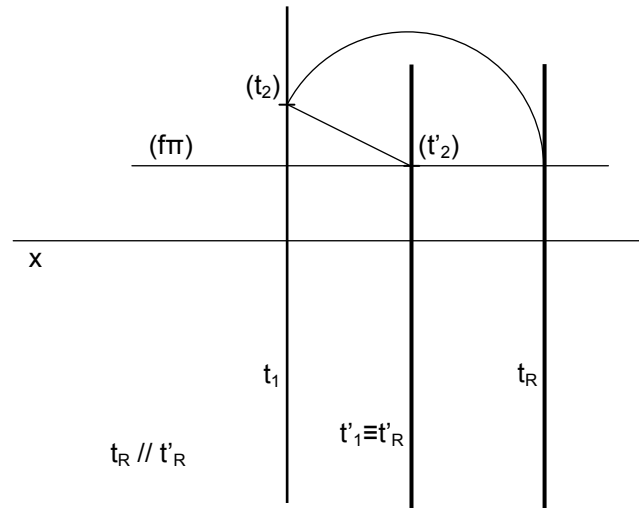
Os rebatimentos de planos definidos por retas, mostrados nas páginas anteriores, são feitos sobre planos horizontais ou frontais e em torno de retas que neles existem, ou seja, charneiras horizontais, frontais, fronto-horizontais e de topo. Nesta página os planos são definidos por retas paralelas desse tipo, pelo que uma delas é utilizada como charneira.

Este tipo de rebatimento pode ser aplicado na determinação da verdadeira grandeza da distância entre duas retas paralelas.



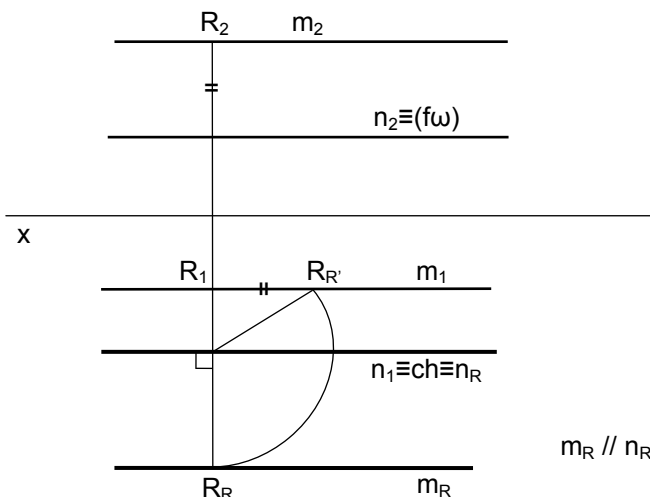
Rebatimento de um plano definido por duas retas horizontais utilizando uma delas como charneira

Aqui temos como charneira a reta b , por onde se passa o plano horizontal β sobre o qual rebata a reta a , que fica, obviamente, paralela à b .



Rebatimento de um plano definido por duas retas de topo utilizando uma delas como charneira

Neste caso utiliza-se como charneira a reta t' , por onde se passa o plano horizontal π sobre o qual rebata a reta t , que fica paralela à outra.

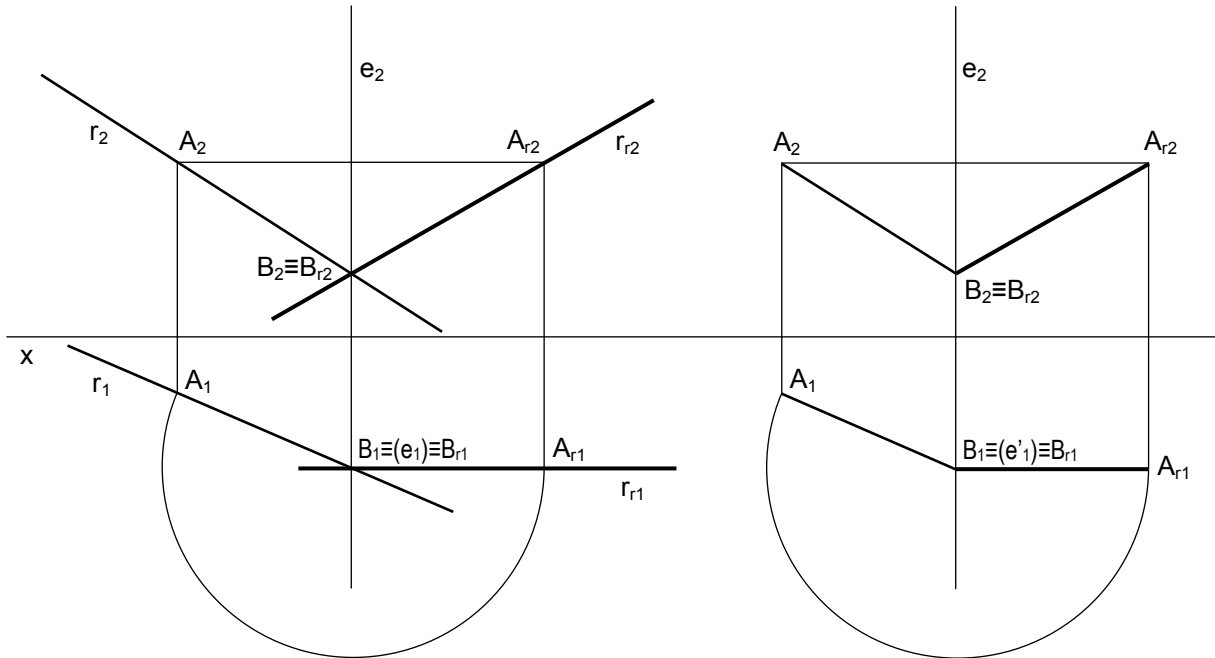


Rebatimento de um plano definido por duas retas fronto-horizontais utilizando uma delas como charneira

Neste caso a reta n é a charneira, passando por ela o plano horizontal ω sobre o qual vai rebater a reta m que, rebatida, continua fronto-horizontais.

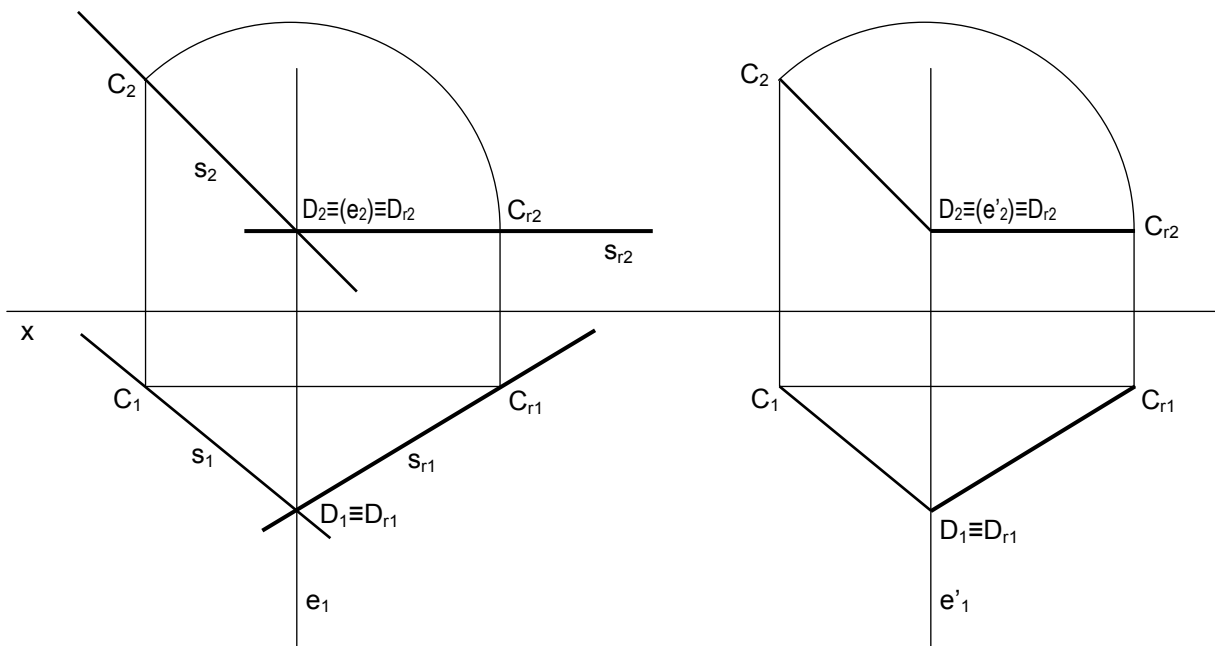
Rotação de retas e de segmentos de reta

Com as rotações altera-se a posição das figuras geométricas, rodando-as em torno de eixos verticais ou de topo. Por norma, no caso dos segmentos de reta, passa-se o eixo por um extremo e roda-se o outro; no caso das retas passa-se por um dos seus pontos e roda-se um outro. Nos exemplos mostrados parte-se da posição oblíqua, mas pode-se partir de outras posições.



Rodar a reta e o segmento de reta oblíquos para frontais

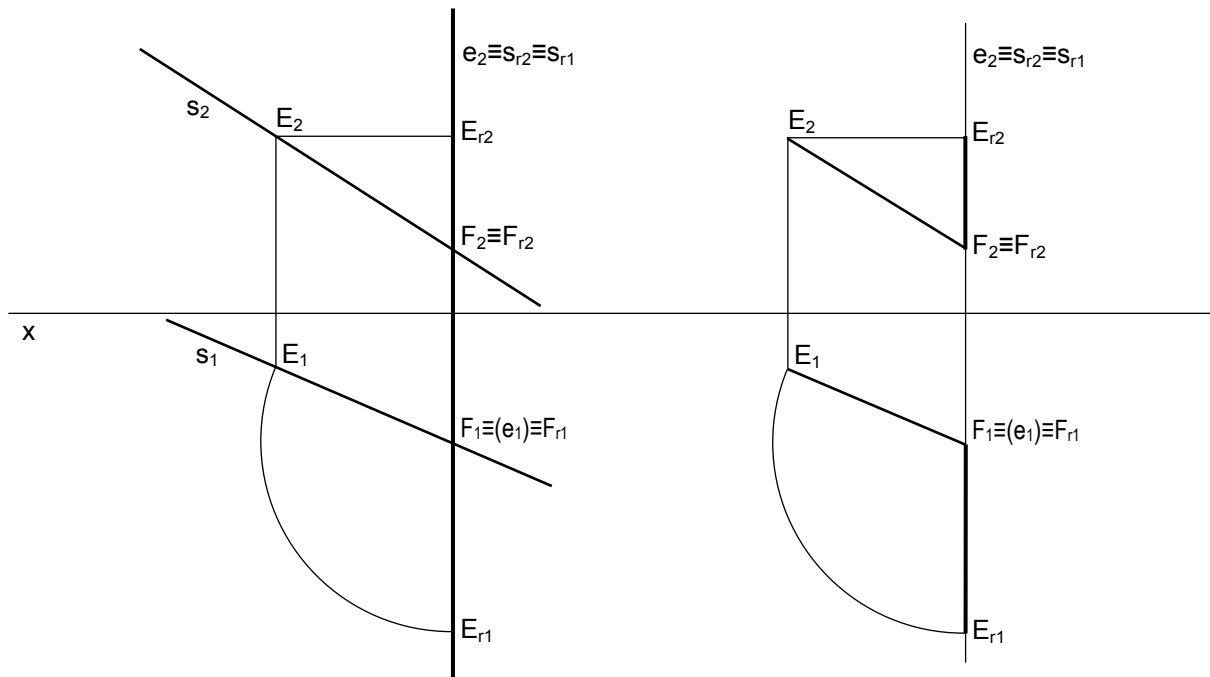
Nestas rotações utiliza-se o eixo vertical contendo o ponto B. O ponto A roda até ao afastamento do B. A projeção horizontal de A roda com o compasso, a frontal desloca-se paralela ao eixo x.



Rodar a reta e o segmento de reta oblíquos para horizontais

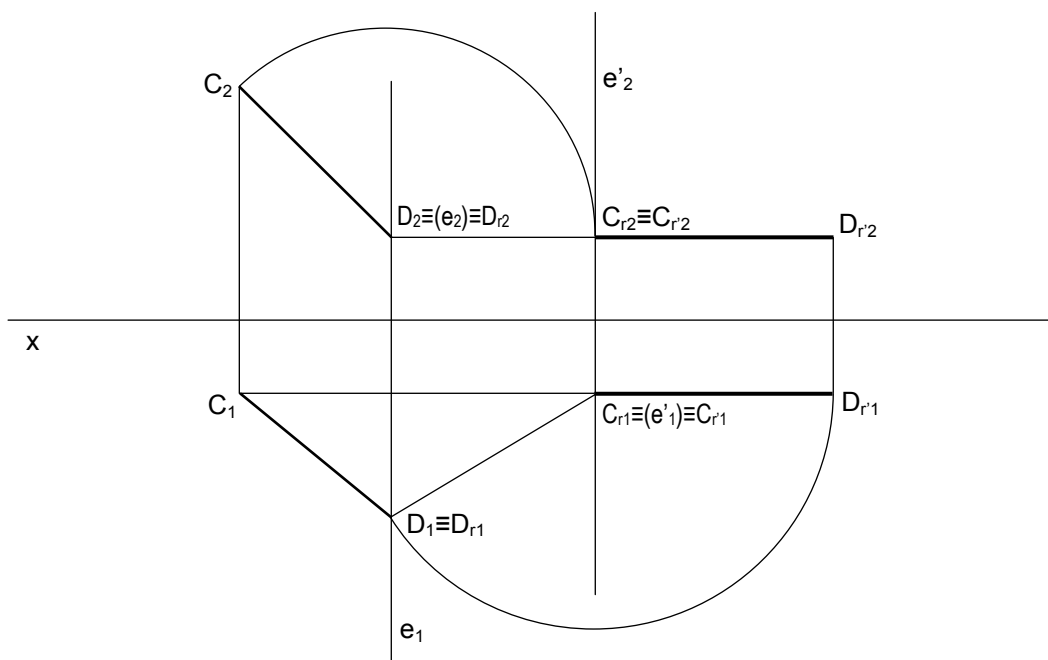
Este caso é o inverso do anterior. Passando um eixo de topo pelo ponto D faz-se rodar o ponto C até ficar com a cota do D.

A primeira situação aqui apresentada resolve-se também apenas com uma rotação, na segunda já é necessário aplicar duas.



Rodar a reta e o segmento de reta oblíquos para de perfil

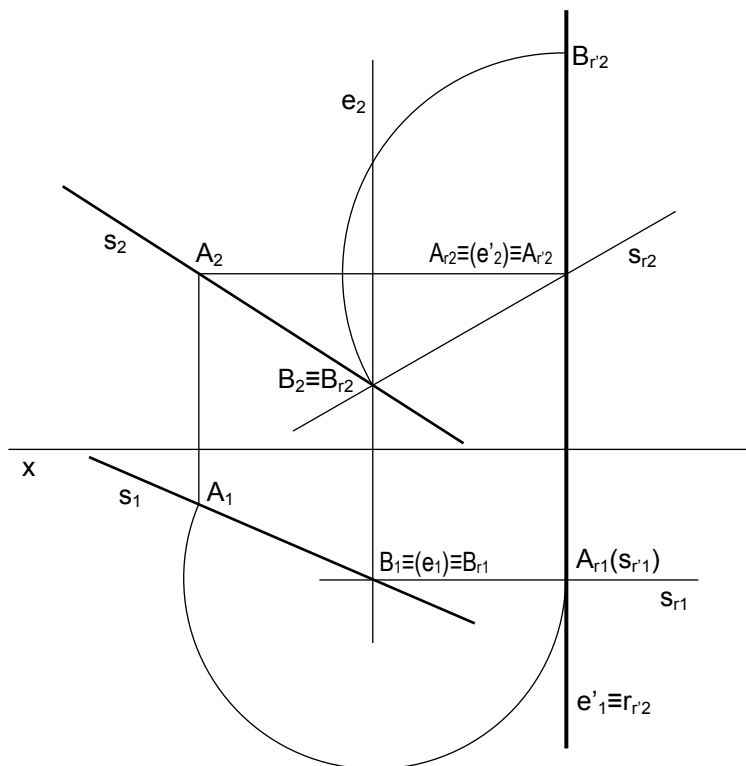
Aqui o eixo contém o ponto F, fazendo-se rodar o ponto E até à abscissa do outro. Para estas situações é indiferente utilizar um eixo vertical ou de topo.



Rodar o segmento de reta oblíquo para fronto-horizontal

Aqui é necessário aplicar duas rotações. Primeiro colocou-se o segmento na posição intermédia horizontal, utilizando um eixo de topo; depois colocou-se na posição final, com um eixo vertical. A posição intermédia será frontal se se fizer a primeira rotação com um eixo vertical. Utilizando uma reta o procedimento é idêntico.

Aqui mostram-se outros casos onde se aplicam duas rotações. No primeiro mostra-se uma reta, no segundo, um segmento de reta.

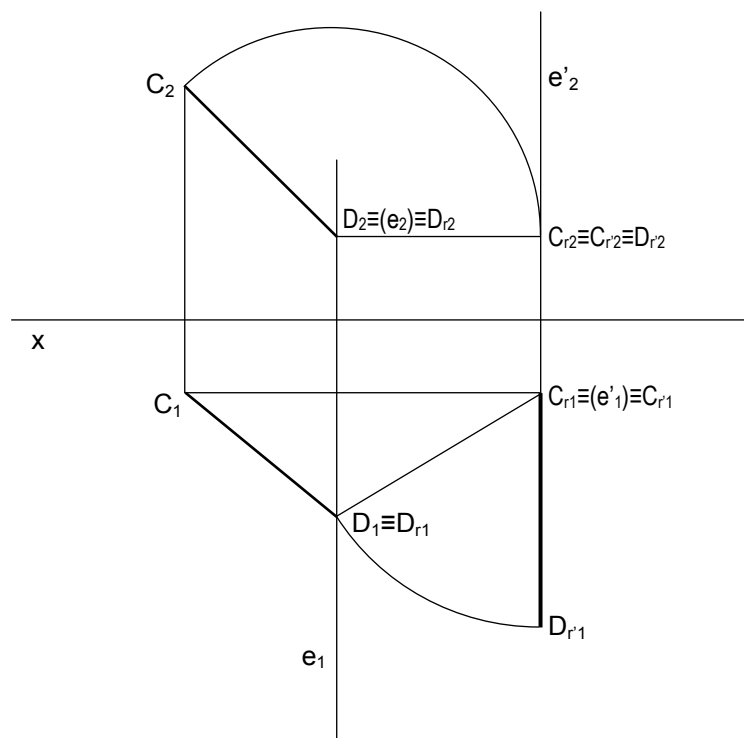


Rodar a reta oblíqua para vertical

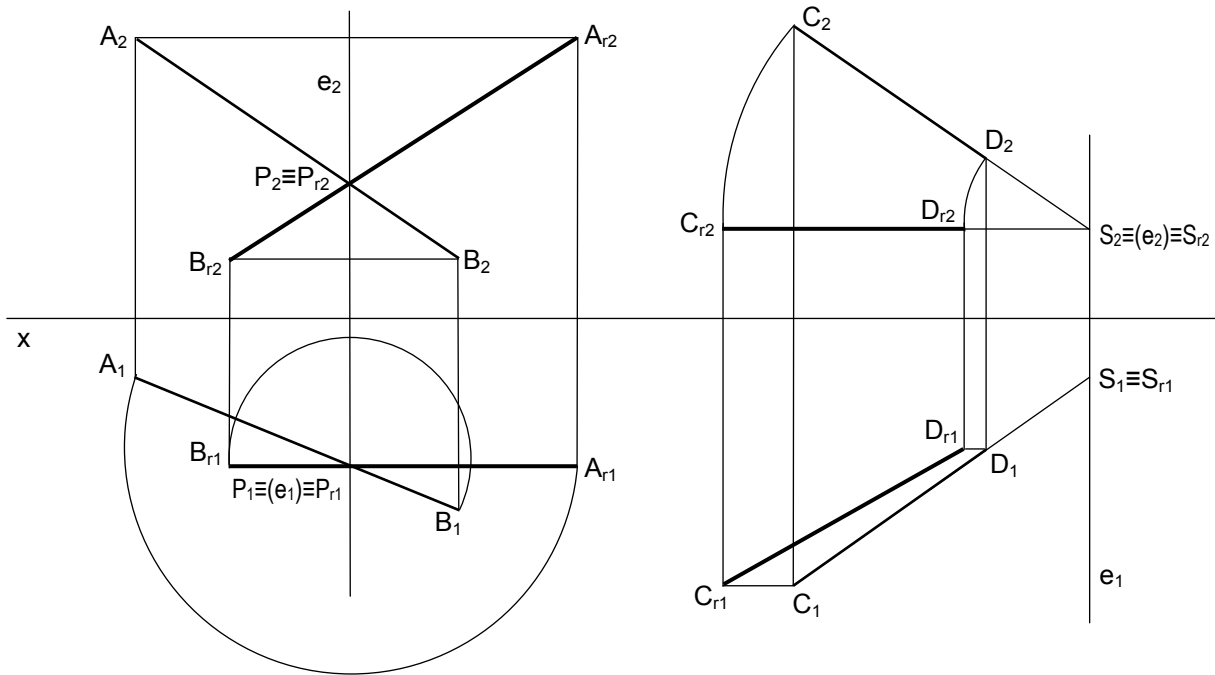
A primeira rotação consiste em colocar a reta na posição frontal, com um eixo vertical; na segunda, para o colocar vertical, utiliza-se um eixo de topo. A aplicação dos eixos tem de ser feita pela ordem referida. O processo seria idêntico caso se tratasse de um segmento de reta.

Rodar o segmento de reta oblíquo para de topo

A primeira rotação consiste em colocar o segmento de reta na posição horizontal, com um eixo de topo; na segunda, para o colocar de topo, utiliza-se um eixo vertical. A utilização dos eixos tem de ser feita pela ordem referida. O processo seria idêntico caso se tratasse de uma reta.

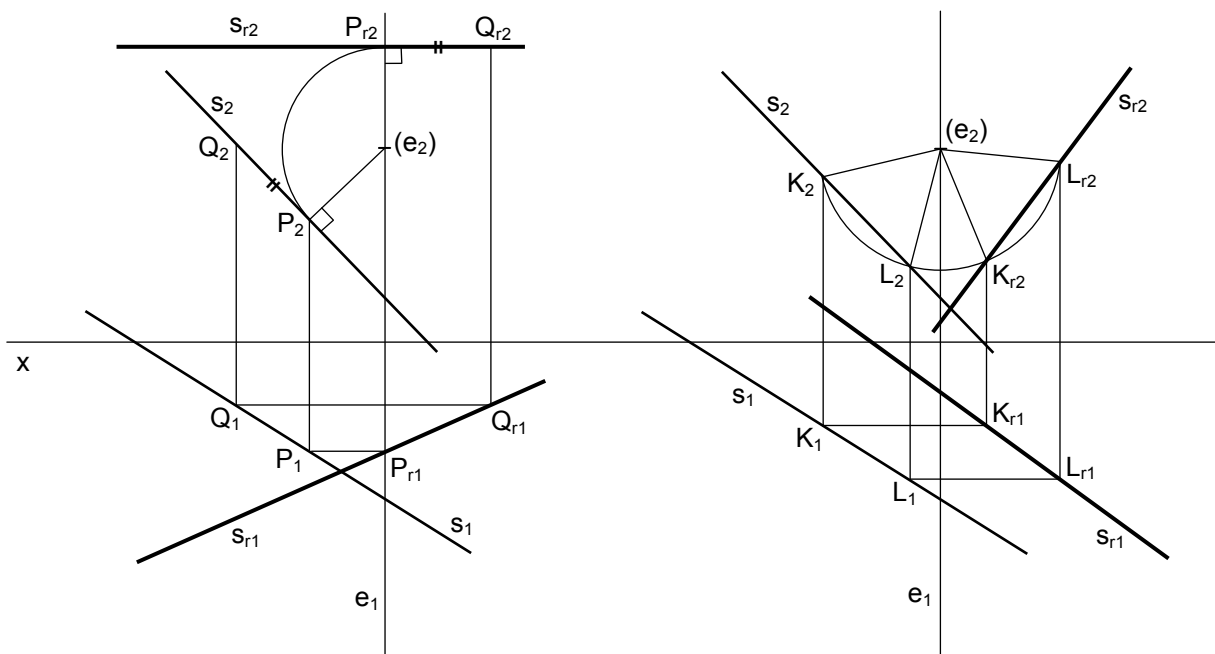


Aqui mostram-se casos em que o eixo cruza um ponto intermédio ou fora do segmento de reta, assim como outros em que o eixo é enviesado com a reta.



Rodar segmentos de reta para uma coordenada específica

No primeiro caso roda-se o segmento de reta para o valor de afastamento do ponto P, situado entre os extremos A e B. No segundo caso, o valor de cota pretendido fica fora do segmento de reta [CD], pelo que cruza o eixo no ponto S numa linha que o prolonga. O eixo terá o afastamento ou a cota pretendidos.



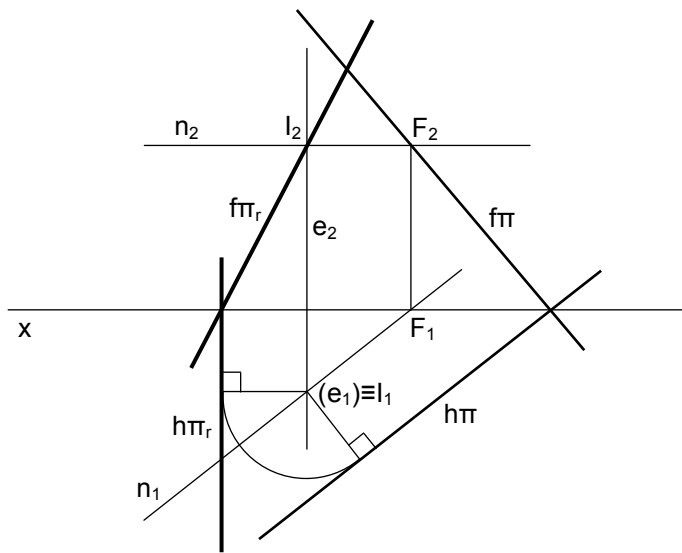
Rodar retas com eixos que não as cruzam

À esquerda roda-se uma reta oblíqua para horizontal utilizando o ponto P, que se obtém com uma perpendicular a partir de (e₂). Para que a reta resulte horizontal, a rotação desse ponto termina no alinhamento do eixo; roda-se também o ponto Q, que mantém a distância que vai dele ao P na projeção frontal. À direita a mesma reta é rodada 110°, pelo que os pontos utilizados rodam ambos esse valor. Aqui a reta mantém-se oblíqua.

Rotação de planos

Para rodar planos utilizam-se também eixos verticais e de topo. Nos exemplos que se vão mostrar parte-se sempre do plano oblíquo. Os desta página resolvem-se com recurso a uma só rotação.

O eixo, ao cruzar-se com o plano, intersecta-o num ponto que é fixo durante a rotação. O traço que se pretende rodar roda com ajuda de um segmento de reta que lhe é perpendicular.

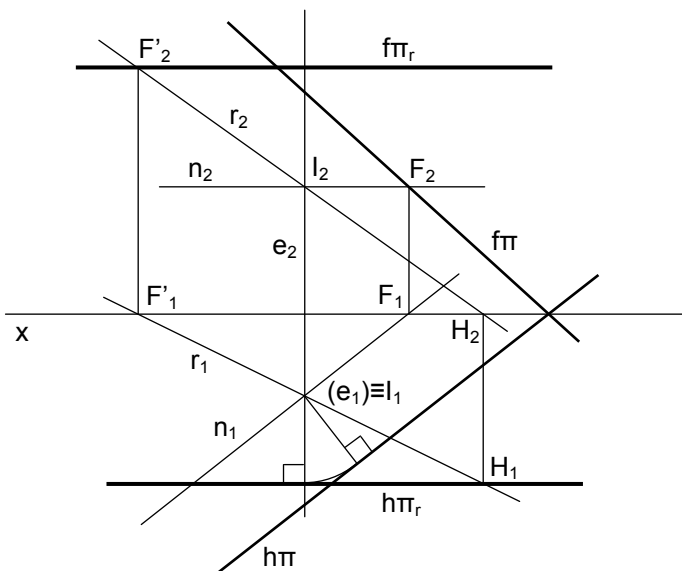
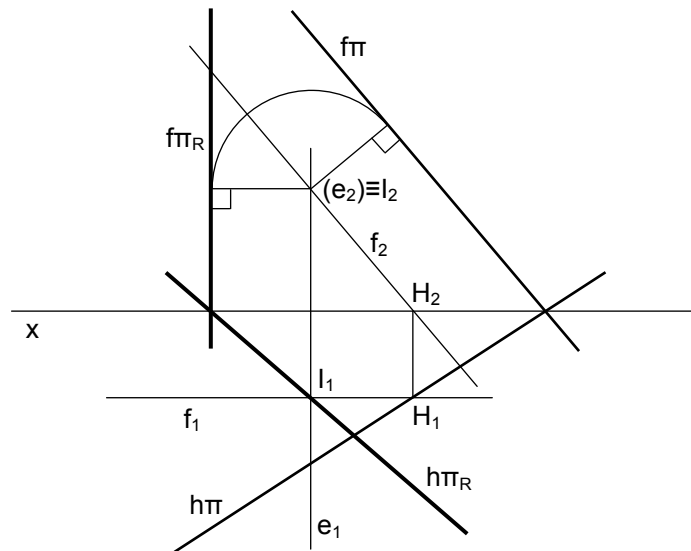


Rodar o plano oblíquo para de topo

O eixo vertical cruza o plano no ponto I. A reta horizontal serve para determinar esse ponto. O segmento de reta perpendicular a hπr é rodado até à posição em que hπr fica perpendicular ao eixo x. Uma vez que o plano de topo é projetante, o traço fπr, passa por I2, ponto que se mantém fixo na rotação.

Rodar o plano oblíquo para vertical

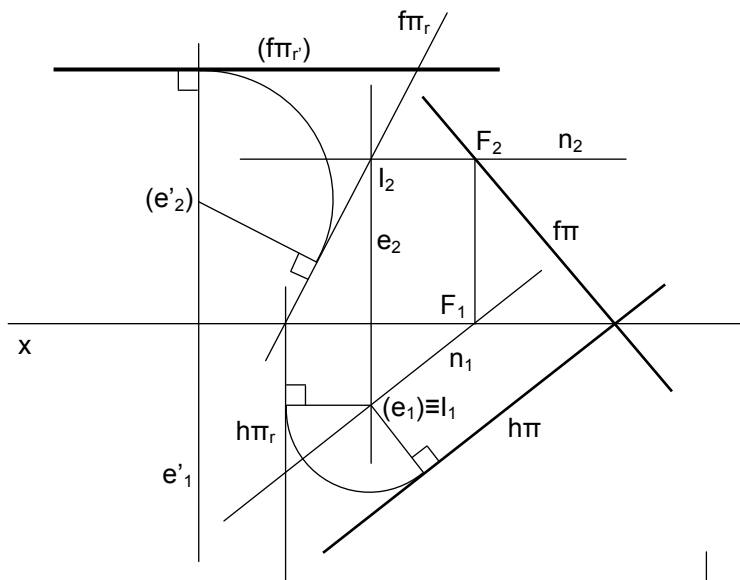
Aqui procede-se de modo idêntico ao anterior, mas utilizando um eixo de topo que faz rodar o plano até à posição desejada. O traço frontal do plano é rodado até ficar perpendicular ao eixo x. Utiliza-se uma reta frontal para determinar o ponto I. Em qualquer casos, é indiferente essa reta ser horizontal ou frontal.



Rodar o plano oblíquo para de rampa

Para que o plano fique de rampa é indiferente utilizar um eixo vertical ou de topo. Neste caso utilizou-se um eixo vertical. A rotação do traço horizontal do plano terminou quando este ficou paralelo ao eixo x. Automaticamente, o outro traço ficou também paralelo ao eixo x. Após a obtenção do traço hπr, foi necessário traçar uma reta oblíqua (concorrente com o ponto fixo I, que é fixo), por cujo traço frontal passa o traço fπr.

Para alterar o plano oblíquo para horizontal, frontal ou de perfil são necessárias duas rotações. São esses os casos que se mostram aqui. De reparar que os dois primeiros exercícios são idênticos, na primeira rotação, aos primeiros da página anterior.

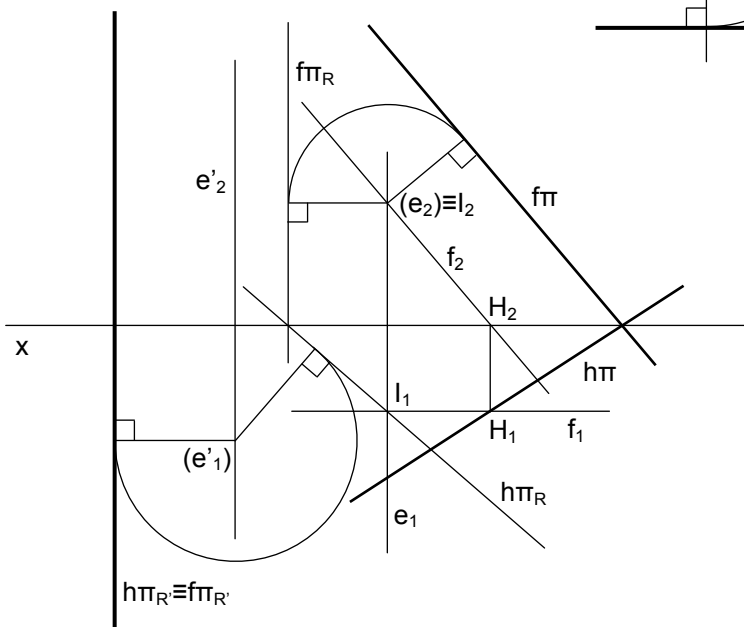
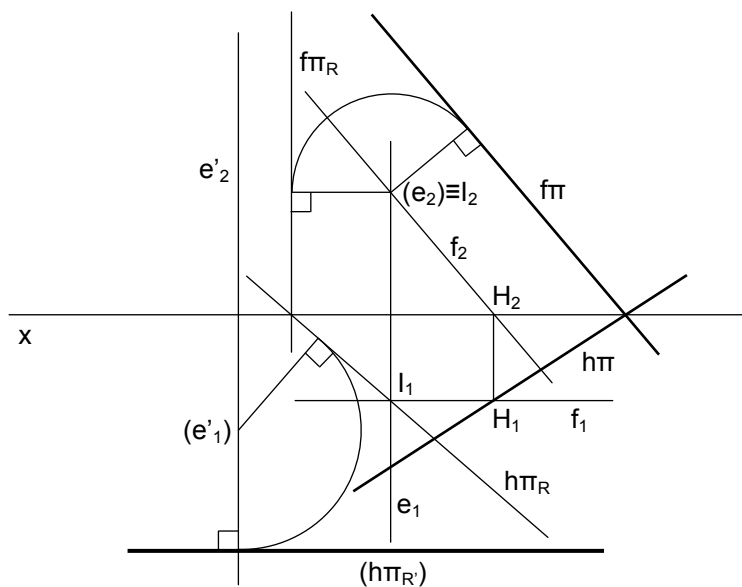


Rodar o plano oblíquo para horizontal

Depois de alterar o plano oblíquo para de topo (ver pág. anterior) aplicou-se um eixo de topo. Em torno desse eixo roda-se o plano até à posição horizontal. Como o eixo e o plano de topo são paralelos não existe ponto de intersecção. Na posição final o traço horizontal desaparece.

Rodar o plano oblíquo para frontal

Primeiro altera-se o plano para a posição intermédia vertical (ver página anterior). Após isso roda-se para a posição frontal utilizando um eixo vertical. Na posição final o traço frontal desaparece.

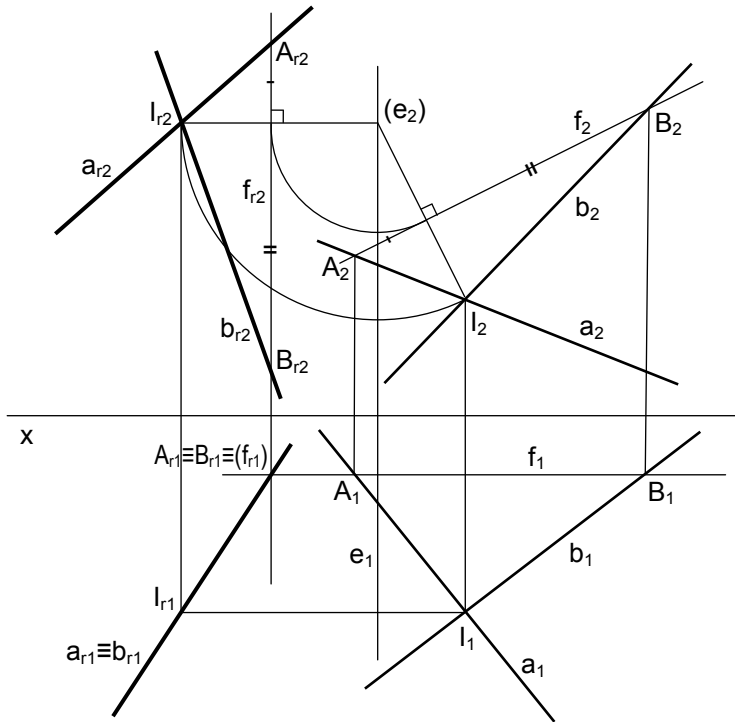


Rodar o plano oblíquo para de perfil

A posição intermédia entre o plano oblíquo e o de perfil tanto pode ser a de topo como a vertical. Aqui coloca-se na posição vertical. Comparando com o caso anterior, bastou rodar o plano vertical mais 90° em torno de um eixo vertical. Naturalmente, os traços do plano ficam coincidentes.

Rotação de planos definidos por retas

Mostra-se aqui como se rodam planos definidos por retas. Os casos desta página resolvem-se apenas com a aplicação de uma rotação.



Rodar um plano oblíquo para vertical

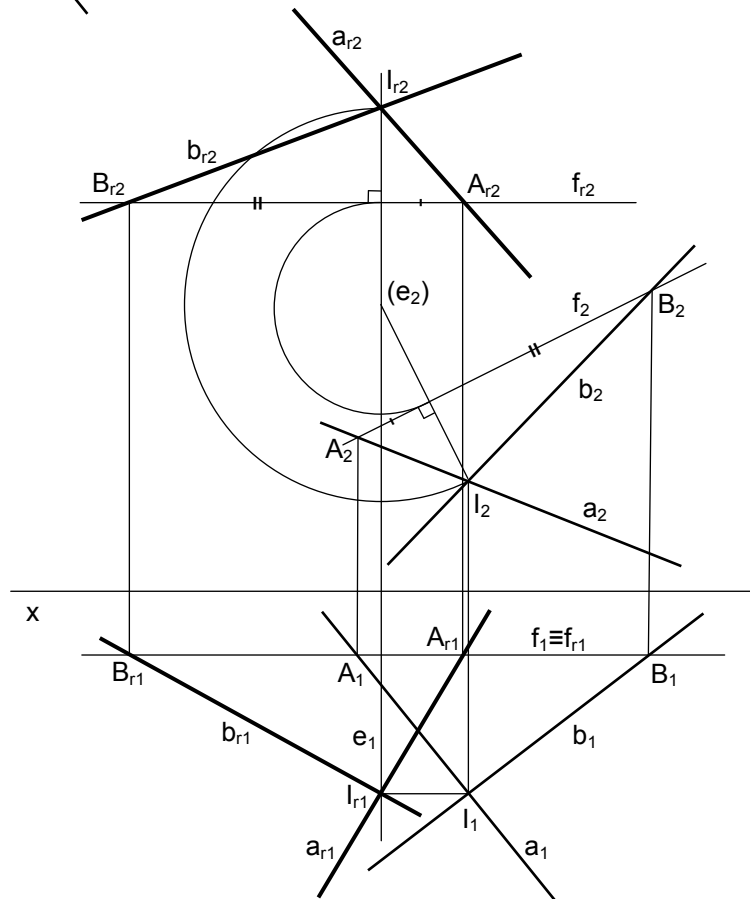
Para colocar o plano oblíquo definido pelas retas a e b para a posição vertical, roda-se uma reta frontal sua para a posição vertical. Para poupar traçado utiliza-se um eixo alinhado com I_2 na perpendicular a f_2 . Na rotação, o triângulo formado pelos pontos A , B e C mantém as proporções na projeção frontal.

Para colocar o plano na posição de topo utiliza-se um eixo vertical e uma reta horizontal, que se coloca de topo.

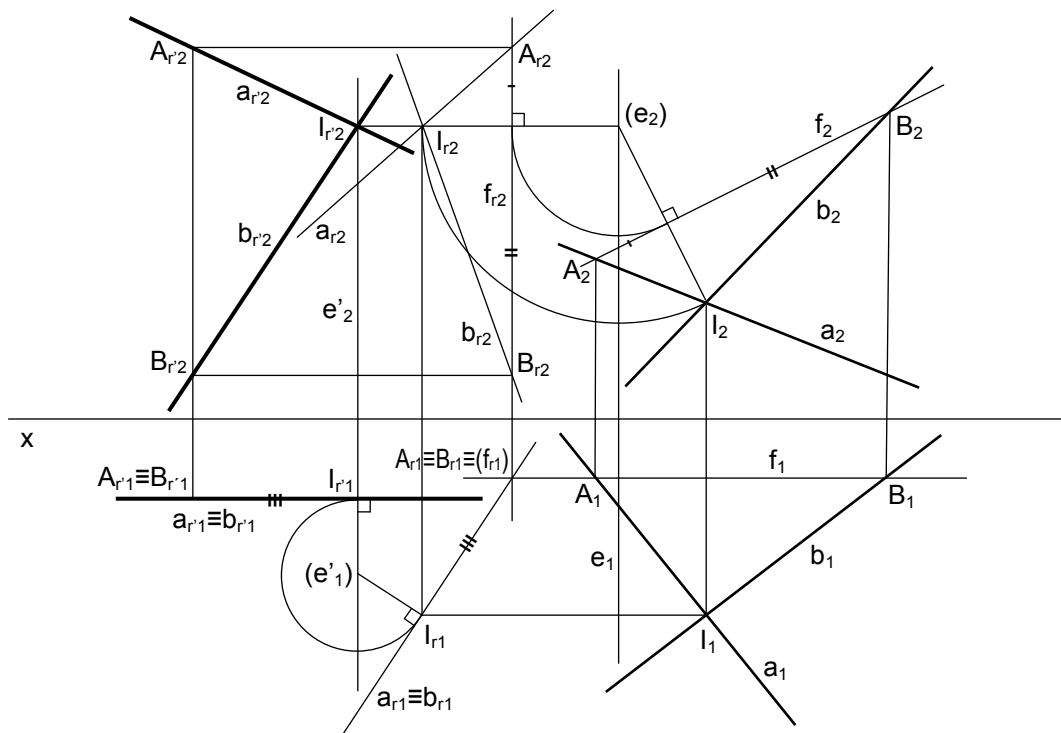
Rodar um plano oblíquo para de rampa

Para colocar o plano oblíquo definido pelas retas a e b na posição de rampa, roda-se uma reta frontal sua para a posição fronto-horizontal. Compare-se este caso com o anterior e veja-se que aqui a reta f roda mais 90° .

Este caso também se resolve fazendo rodar uma reta horizontal com um eixo vertical.

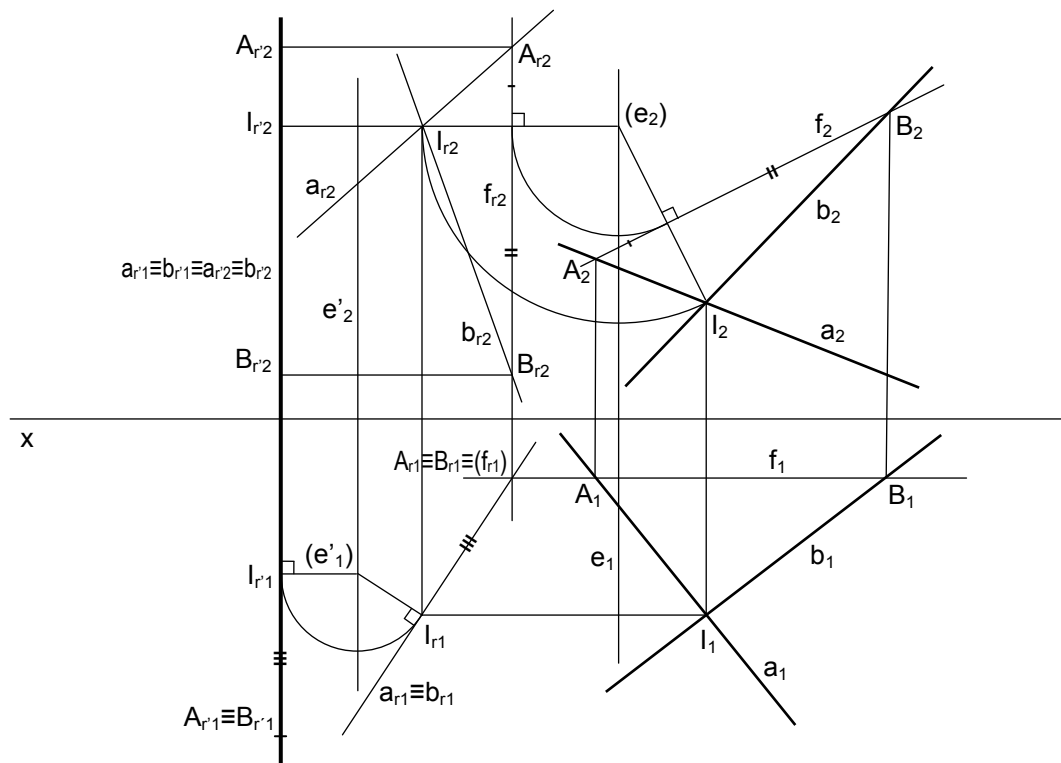


Aqui observam-se dois casos que se resolvem com a aplicação de duas rotações.



Rodar um plano oblíquo para frontal

Para colocar o plano oblíquo definido pelas retas a e b na posição frontal, coloca-se primeiro vertical, só depois na posição pretendida. Esta situação surge na continuação do primeiro exercício da página anterior. Para colocar o plano na posição horizontal, coloca-se primeiro de topo.



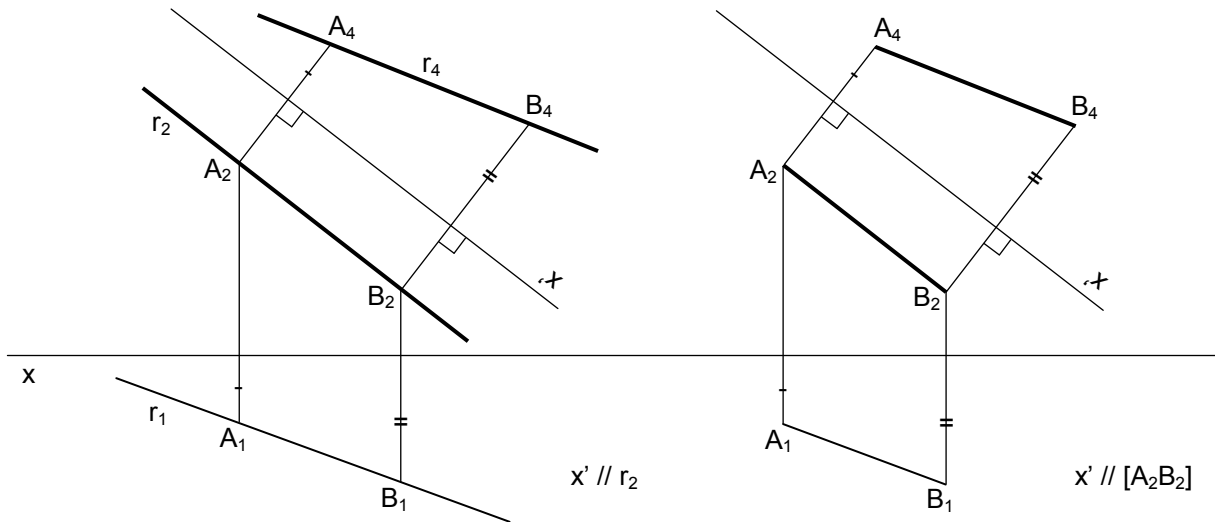
Rodar um plano oblíquo de perfil

Para colocar o plano na posição de perfil, coloca-se primeiro vertical, só depois na posição pretendida. A segunda rotação corresponde a menos 90° que a do exercício anterior. As retas a e b ficam ambas de perfil. Esta situação também se resolve colocando o plano na posição intermédia de topo.

Mudanças de planos aplicadas a retas e segmentos de reta

No método das mudanças de planos, as figuras geométricas mantêm-se inalteráveis no espaço, sendo os planos de projeção que se movem.

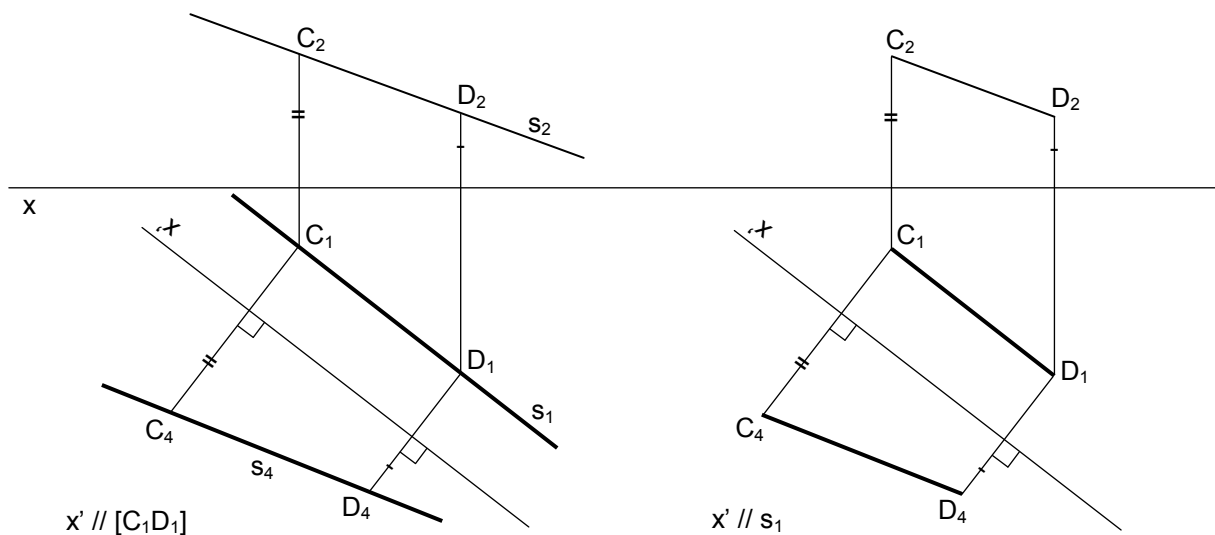
Se se mover o plano frontal de projeção surgirá uma nova projeção frontal; movendo o plano horizontal de projeção surgirá uma nova projeção horizontal. Aqui mostra-se como alterar a posição da reta e do segmento de reta oblíquos para outras posições, o que se faz utilizando dois pontos.



Alterar a reta e o segmento de reta oblíquos para horizontais

Ao colocar o eixo x' paralelo à projeção horizontal, garante-se que toda a reta e todo o segmento de reta ficam com a mesma cota. Os afastamentos dos pontos A e B serão deslocados para o novo eixo, através de linhas chamadas a ele perpendiculares. Resultam novas projeções horizontais para os pontos e para a reta e segmento de reta. De notar que x' está escrito ao contrário, para se marcarem os afastamentos para lá do novo eixo. A distância entre x' e r_2 ou $[A_2B_2]$ é indiferente, salvo se um exercício exigir uma cota precisa.

A mesma posição do eixo mas com x' escrito na posição inversa àquela em que se encontra, levaria à marcação das novas projeções para o lado de cá. Os pontos têm afastamentos positivos, que se devem manter.

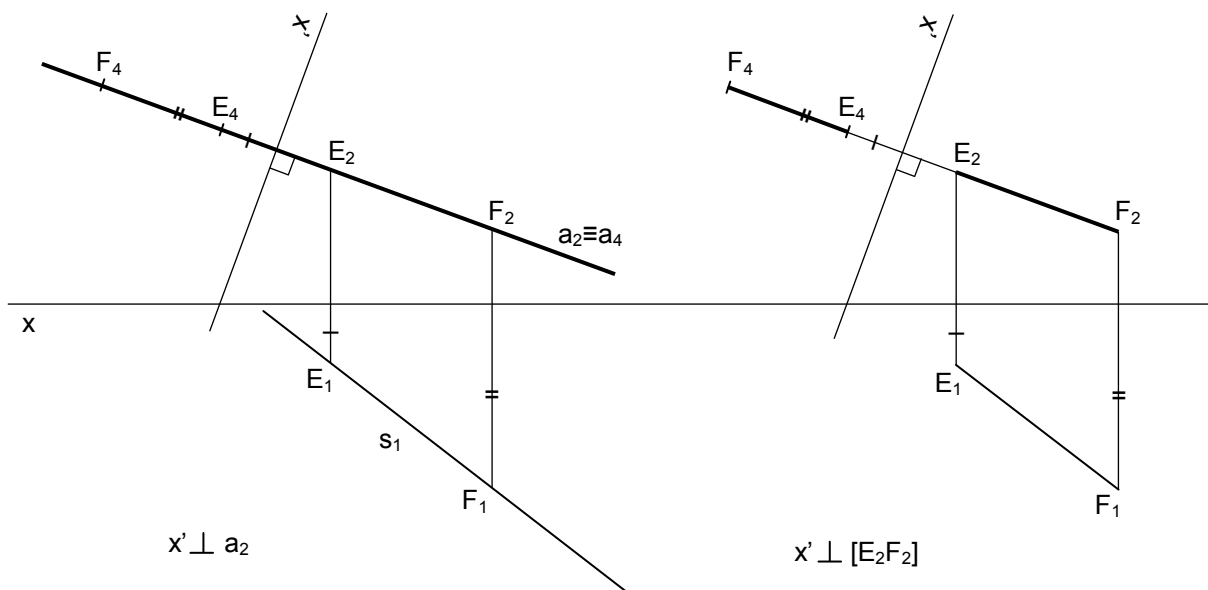


Alterar a reta e o segmento de reta oblíquos para frontais

Aqui procede-se de modo idêntico ao anterior, mas colocando o eixo x' paralelo à projeção horizontal da figura.

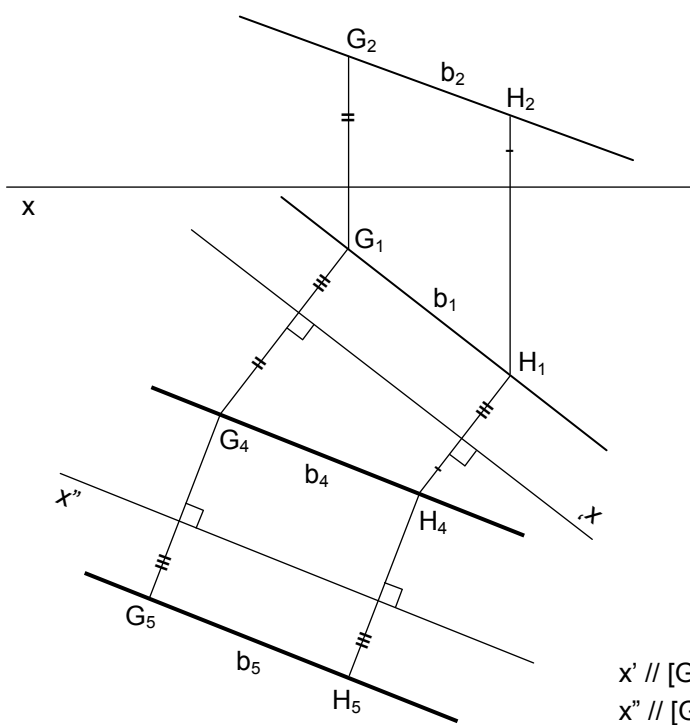
Nesta página temos ainda uma situação que se resolve apenas com uma mudança de plano e outra onde são necessárias duas.

Se se pretender uma reta ou um segmento de reta com uma determinada cota ou afastamento, coloca-se o eixo x de modo a garantir o valor pretendido.



Alterar a reta e o segmento de reta oblíquos para de perfil

Aqui colocou-se o novo eixo na perpendicular à projeção frontal da figura, mas pode-se também colocar na perpendicular à horizontal. Deslocando as projeções horizontais dos pontos E e F obtém-se uma nova projeção horizontal das figuras.



Alterar a reta oblíqua para fronto-horizontal

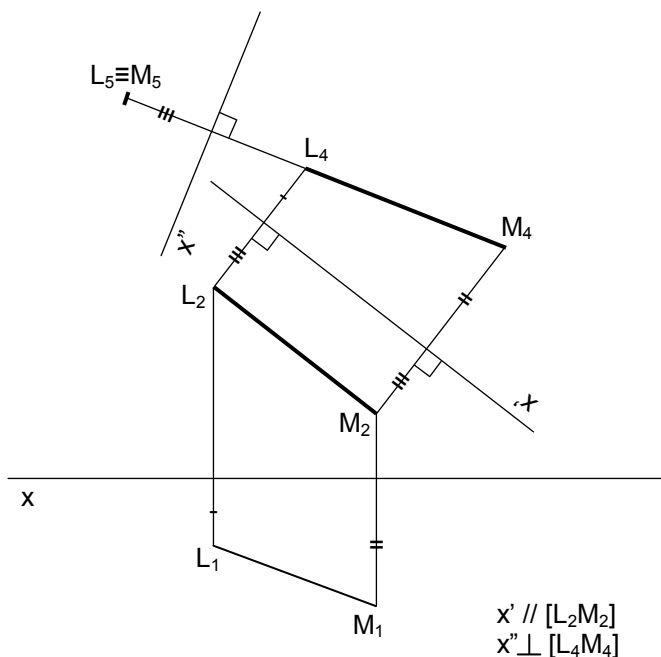
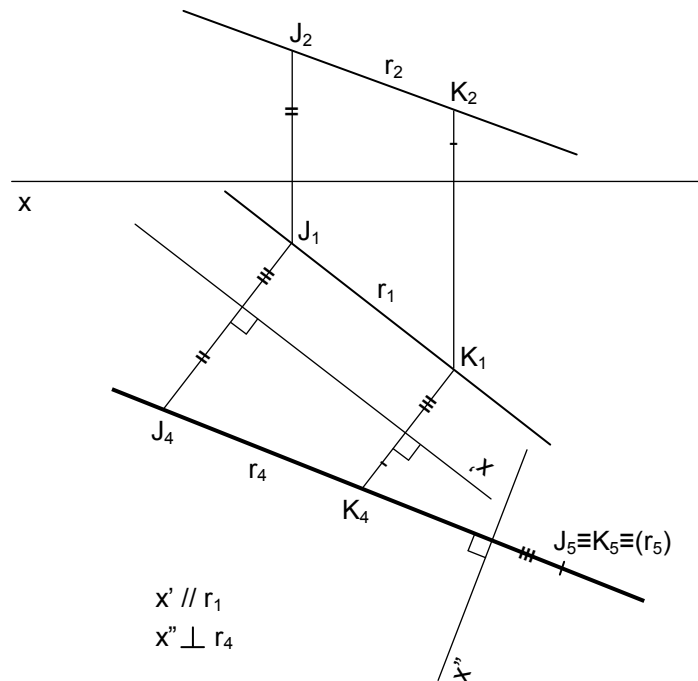
Esta alteração obriga à utilização de duas mudanças de plano. Aqui a posição intermédia é frontal, mas poderia ser horizontal. As cotas dos pontos G_4 e H_4 são iguais às de G_2 e H_2 ; os afastamentos de G_5 e H_5 são iguais aos de G_1 e H_1 . O eixo x' é paralelo à projeção frontal da reta; o eixo x'' é paralelo à nova projeção horizontal. O processo seria idêntico caso se tratasse de um segmento de reta.

$x' // [G_1H_1]$
 $x'' // [G_4H_4]$

Nesta página são mostradas mais duas situações que implicam duas mudanças de planos. Nestes casos, a primeira consiste em resolver a relação de paralelismo, só depois a de perpendicularidade. Se se pretender uma reta ou segmento com uma determinada cota ou afastamento, coloca-se o eixo x de modo a garantir o valor pretendido.

Alterar a reta oblíqua para vertical

Esta alteração obriga à utilização de duas mudanças de plano, em que a posição intermédia tem de ser frontal. As cotas dos pontos J_4 e K_4 são iguais às de J_2 e K_2 ; os afastamentos de J_5 e K_5 são iguais aos novos afastamentos de J_1 e K_1 . O eixo x' é paralelo à projeção frontal da reta; o eixo x'' é paralelo à nova projeção horizontal. O processo seria idêntico caso se tratasse de um segmento de reta.

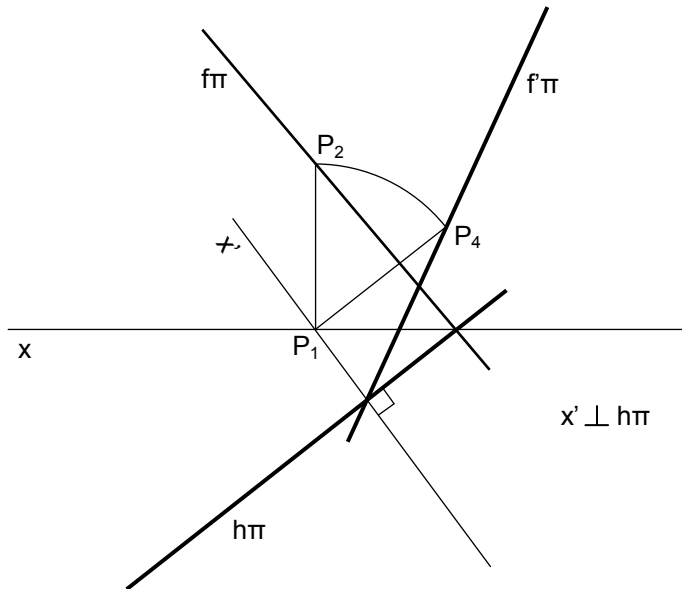


Alterar o segmento de reta oblíquo para de topo

Aqui a posição intermédia tem de ser horizontal, pelo que o eixo x' é paralelo a $[L_2M_2]$. O eixo x'' é perpendicular a $[L_4M_4]$. Os afastamentos de L_4 e M_4 são iguais aos de L_1 e M_1 ; as cotas de L_5 e M_5 são iguais às novas cotas de L_2 e M_2 . O processo seria idêntico caso se tratasse de uma reta.

Mudanças de planos aplicadas a planos

Aqui mostram-se os casos em que as posições dos planos são alteradas apenas com uma mudança de plano. Utiliza-se um ponto auxiliar que, como se verá, é o ponto que pertence ao traço cuja posição se vai alterar. Esse ponto tem uma das projeções no cruzamento dos dois eixos.

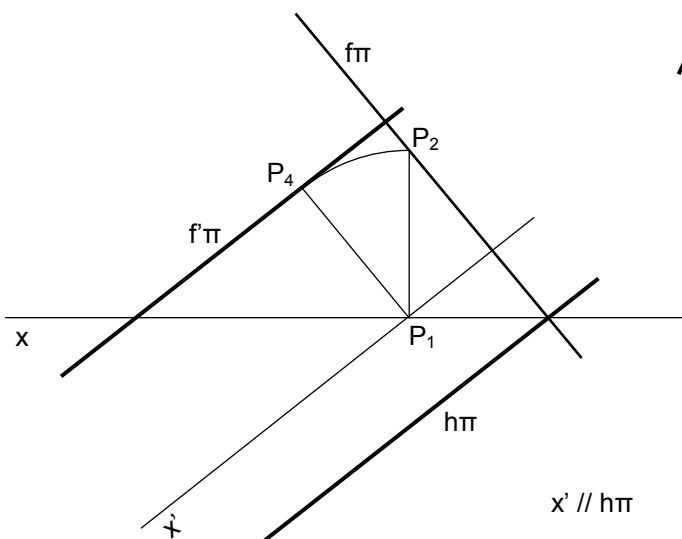
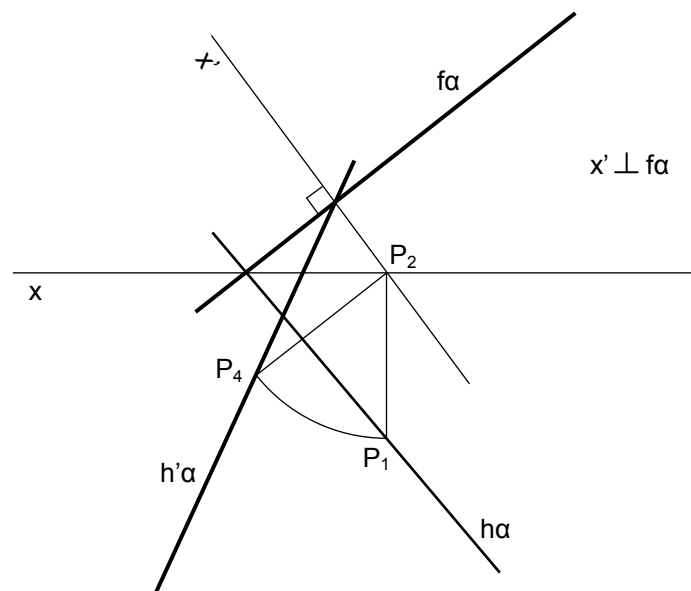


Alterar o plano oblíquo para de topo

Colocando o eixo x' na perpendicular ao traço horizontal, basta mudar o ponto P , que pertence a esse traço e tem a sua projeção horizontal no ponto onde se cruzam os eixos. A deslocação da projeção P_2 para P_4 faz-se com o compasso, como forma de garantir que a medida se mantém. De notar que cada linha de chamada do ponto P é perpendicular a um dos eixos.

Alterar o plano oblíquo para vertical

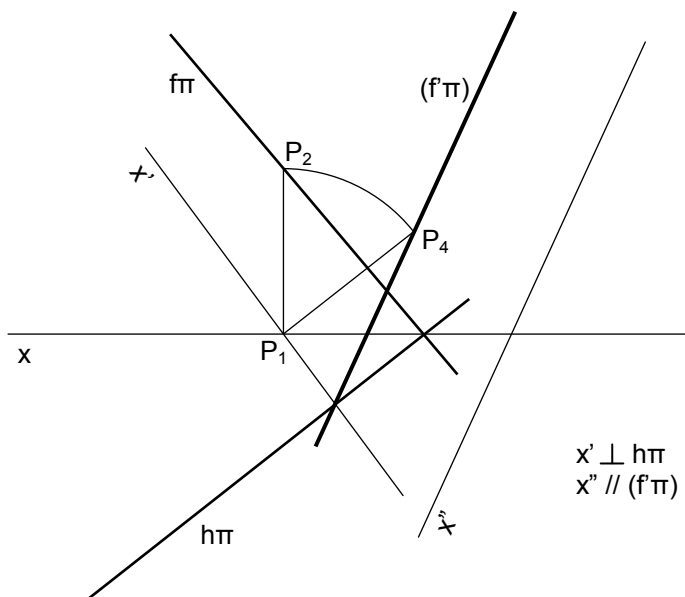
Aqui coloca-se o eixo x' na perpendicular ao traço frontal e utiliza-se o ponto P situado nesse traço, e cuja projeção frontal está no cruzamento dos eixos.



Alterar o plano oblíquo para de rampa

Aqui colocou-se o eixo x' paralelo ao traço horizontal do plano. Como nos casos anteriores, o ponto P é deslocado de modo a que a sua linha de chamada fique perpendicular ao novo eixo. Sendo o eixo x' paralelo a $h\pi$, ficará $f\pi$ também paralelo. Com o eixo x' paralelo ao traço frontal daria resultado idêntico.

Aqui são utilizadas duas mudanças de planos para alterar o plano oblíquo para outra posição. Os dois primeiros exercícios são continuação dos da página anterior.



Alterar o plano oblíquo para horizontal

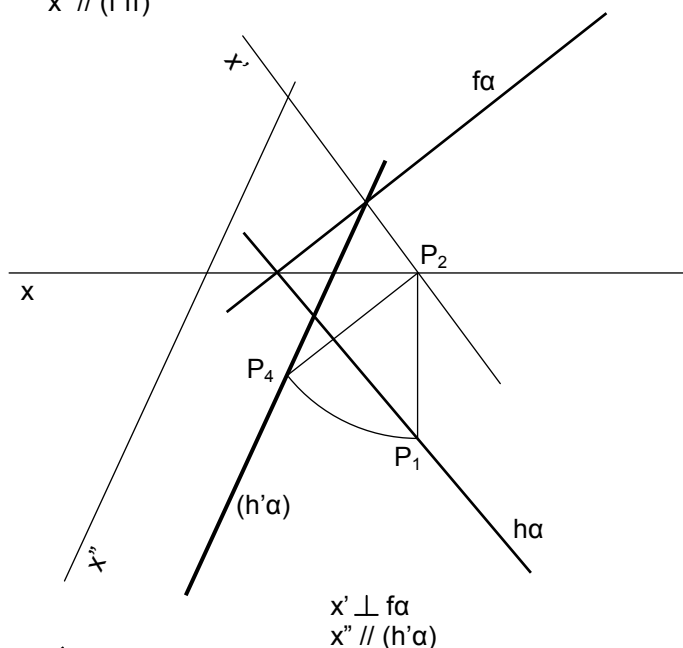
Com o eixo x' perpendicular a $h\pi$, colocou-se o plano na posição de topo. Com o eixo x'' paralelo ao novo traço frontal, o plano fica horizontal. Com o segundo eixo, o traço horizontal do plano deixa de existir, pelo que o frontal se indica entre parêntesis. A distância do eixo x'' ao traço do plano corresponde à sua cota.

$$x' \perp h\pi$$

$$x'' \parallel (f'\pi)$$

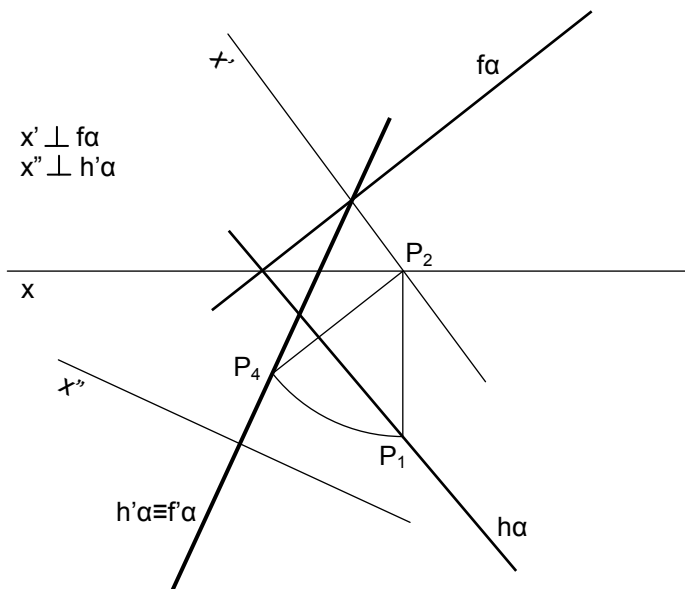
Alterar o plano oblíquo para frontal

Com o eixo x' perpendicular a fa , o plano ficou vertical. Com o eixo x'' paralelo ao novo traço horizontal, o plano fica frontal. Com o segundo eixo, o traço frontal do plano deixa de existir, pelo que o horizontal se indica entre parêntesis. A distância do eixo x'' ao traço do plano corresponde ao seu afastamento.



$$x' \perp fa$$

$$x'' \parallel (h'a)$$



$$x' \perp fa$$

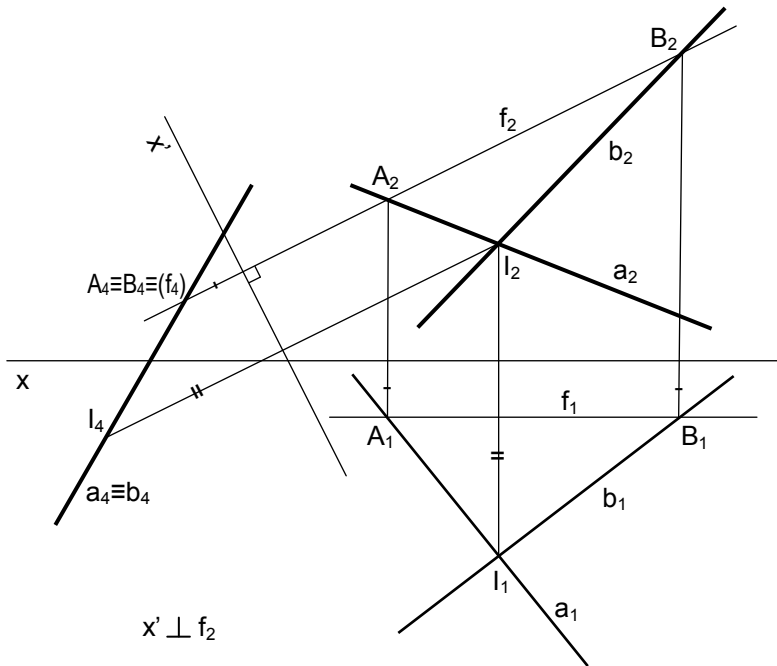
$$x'' \perp h'a$$

Alterar o plano oblíquo para de perfil

Compare-se esta situação com a anterior. Aqui, após colocar o plano na posição vertical, traçou-se o eixo x'' na perpendicular ao novo traço. Desse modo, o plano fica de perfil, bastando indicar a coincidência entre os seus traços. Daria resultado idêntico caso a posição intermédia fosse de topo.

Mudanças de planos aplicadas a planos definidos por retas

Mostra-se aqui como se alteram as posições de planos definidos por retas utilizando mudanças de planos. Os casos desta página resolvem-se apenas com a aplicação de uma mudança de plano.



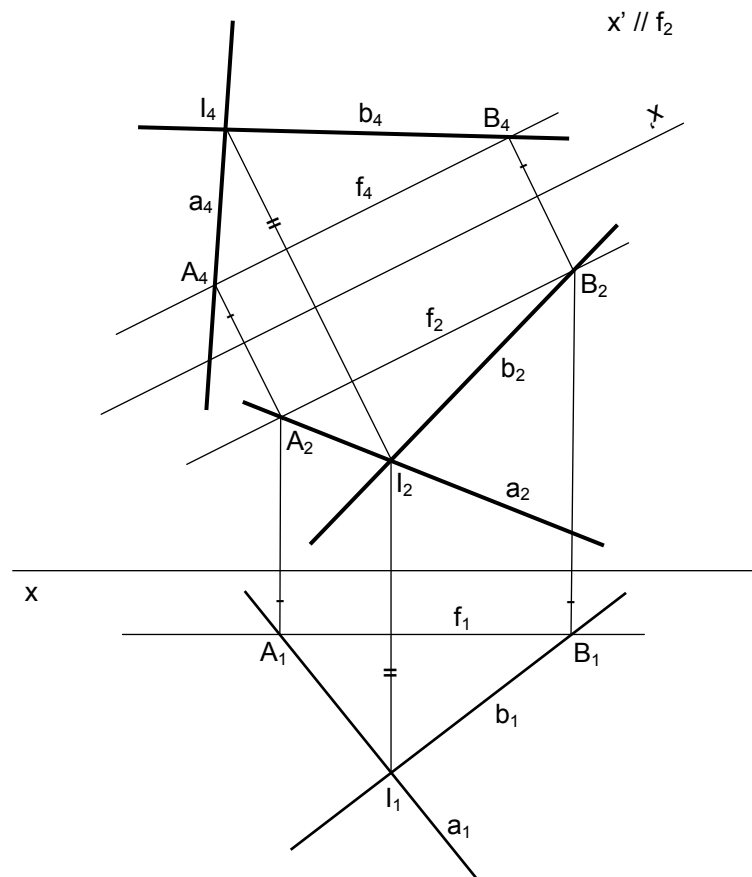
Mudar o plano oblíquo para vertical

Para colocar o plano oblíquo definido pelas retas a e b na posição vertical, utiliza-se uma reta frontal do plano e coloca-se o eixo x' perpendicular à sua projeção frontal. Mudando os pontos A e B essa reta fica vertical; mudando também o ponto I as retas a e b ficam com as novas projeções horizontais coincidentes. Para colocar o plano na posição de topo será utilizada uma reta horizontal, que se coloca de topo.

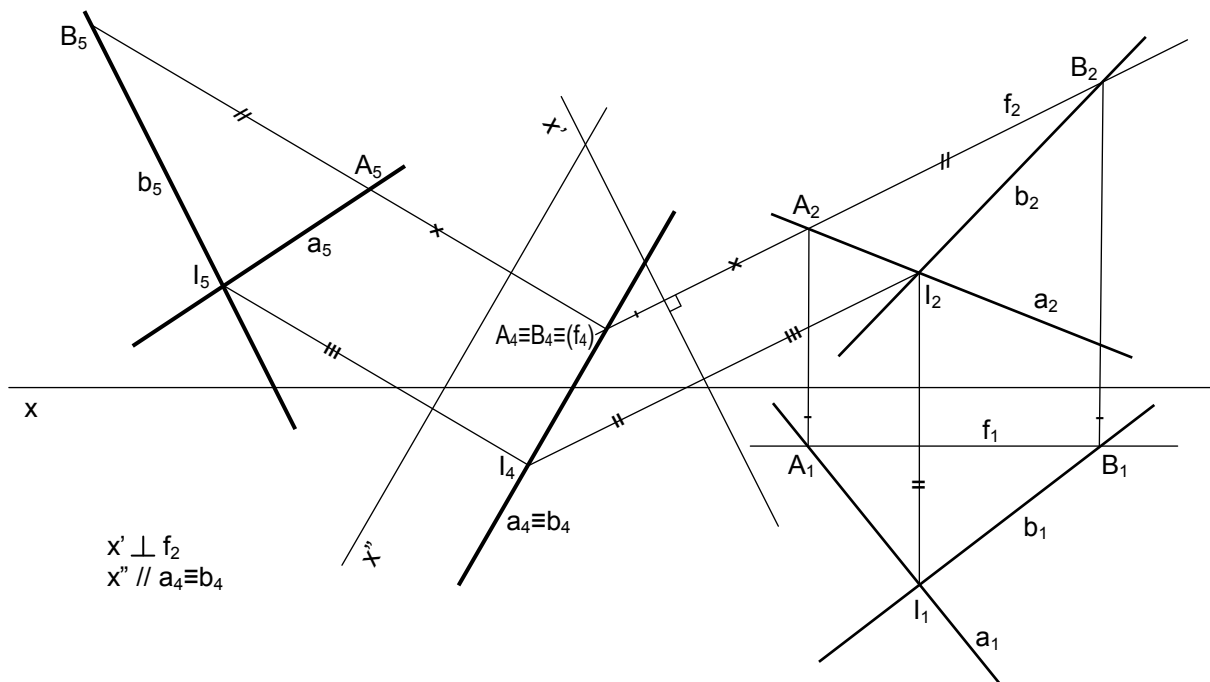
Mudar o plano oblíquo para de rampa

Para colocar o plano oblíquo definido pelas retas a e b na posição de rampa, coloca-se x' paralelo à projeção frontal de uma reta frontal do plano. Na nova posição, essa reta torna-se fronto-horizontal, o que garante que o plano fica de rampa.

Este caso também se resolve utilizando uma reta horizontal e colocando o eixo x' paralelo à sua projeção horizontal.

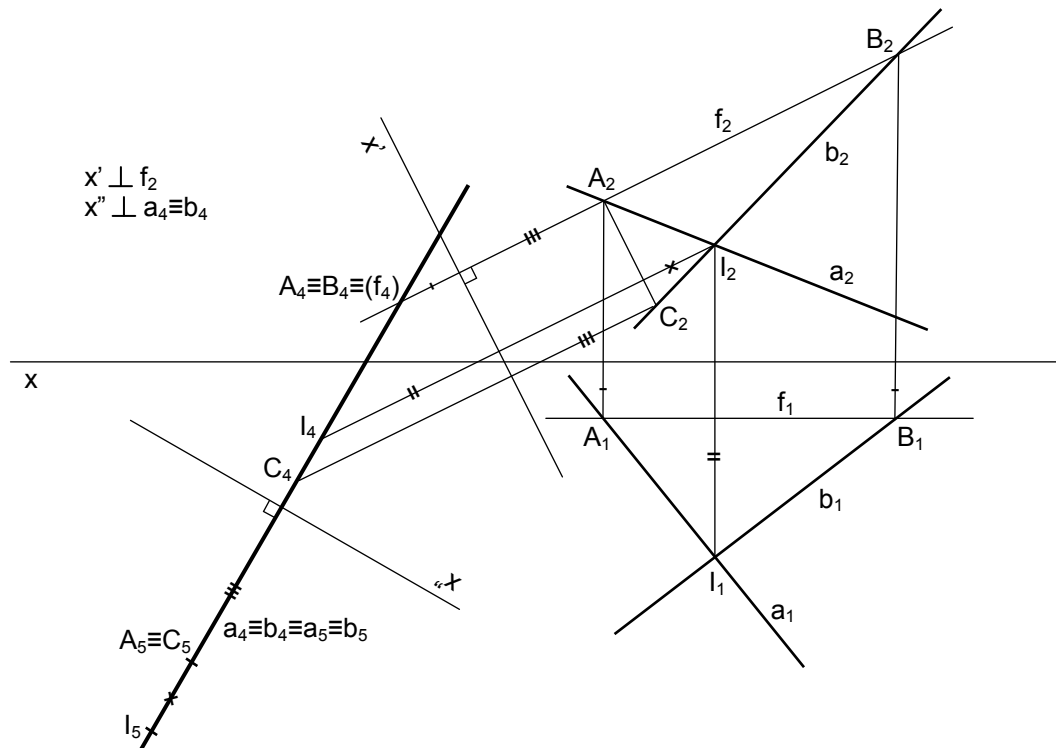


Aqui observam-se dois casos que se resolvem com a aplicação de duas mudanças de planos.



Mudar o plano oblíquo para frontal

Para colocar o plano definido pelas retas a e b na posição frontal, coloca-se primeiro vertical. Para obter a posição pretendida coloca-se o eixo x'' paralelo às novas projeções horizontais das retas e determinam-se as suas novas projeções frontais. Esta situação surge na continuação do primeiro exercício da página anterior. Para colocar o plano na posição horizontal, coloca-se primeiro de topo com recurso a uma reta horizontal.



Mudar o plano oblíquo para de perfil

Para colocar o plano na posição de perfil, coloca-se primeiro vertical. Para obter a posição pretendida coloca-se o eixo x'' perpendicular às novas projeções frontais. Assim, as retas a e b ficam ambas de perfil. Como a nova cota do ponto B não cabe no espaço disponível, mudou-se o ponto C, da mesma reta, com cota igual à do A. Esta situação também se resolve colocando o plano na posição intermédia de topo.

Métodos geométricos auxiliares – Exercícios

Rebatimento de planos projetantes

1. Representar o plano e o segmento de reta que lhe pertence:

- α , vertical, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa e faz 55° ae;
- segmento de recta cujos extremos são os pontos A(1;2) e B(4;-1).

Determinar o rebatimento do plano e do segmento:

- sobre o PFP;
- sobre o PHP.

2. Representar o plano e a reta que lhe pertence:

- α , do exercício anterior;
- p, reta passante cuja projeção frontal faz 60° ae.

Determinar o rebatimento do plano e da reta.

3. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- α , do exercício 1;
- n, reta horizontal com 3cm de cota;
- v, reta vertical com 3cm de afastamento.

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

4. Representar o plano e o segmento de reta que lhe pertence:

- θ , de topo, que cruza o eixo x num ponto com -3cm de abcissa e faz 40° ad;
- segmento de recta cujos extremos são os pontos C(-1;-3) e D(4;2).

Determinar o rebatimento do plano e do segmento:

- sobre o PHP;
- sobre o PFP.

5. Representar o plano e a reta que lhe pertence:

- θ , do exercício anterior;
- r, paralela ao $\beta_{2/4}$, cujo traço horizontal tem 4cm de afastamento.

Determinar o rebatimento do plano e da reta.

6. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- θ , do exercício 5;
- t, de topo, com -2cm de cota;
- s, do $\beta_{2/4}$.

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

7. Representar o plano e o segmento de reta que lhe pertence:

- p, de perfil, com 1cm de abcissa;
- segmento de reta cujos extremos são os pontos E(-1,5;-1,5) e F(2;-4).

Determinar o rebatimento do plano e do segmento.

8. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- p, do exercício anterior;
- p, de perfil, cujos traços são H(-5;0) e F(0;2);
- v, vertical, com 3cm de afastamento;

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

Rebatimento de planos não projetantes

9. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- ψ , que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 35° ad e 50° ad, respetivamente;
- n, horizontal, com 3cm de cota;
- f, frontal, com 2cm de afastamento.

Determinar o rebatimento do plano e das retas:

- sobre o PHP;
- sobre o PFP.

10. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- ψ , do exercício anterior;
- p, de perfil, com abcissa nula;
- n, horizontal, com -2cm de cota;

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

11. Representar o plano e o segmento de reta que lhe pertence:

- ψ , do exercício 9;
- segmento de reta cujos extremos são os pontos G(1;2) e H(3;5);

Determinar o rebatimento do plano e do segmento.

12. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- ω , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa, cujos traços frontal e horizontal fazem 65° ad e 30° ae, respetivamente;
- p, de perfil, com 3,5cm de abcissa
- n, horizontal, com 4cm de cota

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

13. Representar o plano e os pontos que lhe pertencem:

- δ , cujos traços frontal e horizontal têm 3cm de cota e 4cm de afastamento, despectivamente;
- J, com abcissa nula e 3cm de afastamento;
- K, com -4cm de abcissa e 1cm de afastamento.

Determinar o rebatimento do plano e dos pontos.

14. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- δ , do exercício anterior;
- p, de perfil, com 2cm de abcissa;
- h, fronto-horizontal, com 2cm de cota.

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

15. Representar o plano e as retas que lhe pertencem:

- σ , cujos traços frontal e horizontal têm -5cm de cota e 3cm de afastamento;
- a, fronto-horizontal, com 1,5cm de cota
- r, oblíqua, cujos traços frontal e horizontal têm 6cm de abcissa e -1cm de abcissa, respetivamente.

Determinar o rebatimento do plano e das retas.

Rebatimento de planos definidos por retas e por pontos

16. Representar o plano π , definido pelas retas que se cruzam no ponto $l(2;3;6)$:

- r, paralela ao $\beta_{1/3}$, cuja projecção frontal faz $50^\circ ad$;
- s, cujas projecções frontal e horizontal fazem $30^\circ ae$ e $60^\circ ae$, respectivamente.

Determinar o rebatimento do plano sobre:

- um plano horizontal;
- um plano frontal.

17. Representar o plano α , definido por:

- $P(-2;6;1)$;
- a, paralela ao $\beta_{2/4}$, que possui o ponto $A(2;4;2)$, fazendo a sua projecção horizontal $45^\circ ae$.

Determinar o rebatimento do plano sobre:

- um plano horizontal;
- um plano frontal.

18. Representar o plano θ , definido pelos pontos:

- $A(4;1;4)$, $B(-1;5;1)$ e $C(-5;3;1)$.

Determinar o rebatimento do plano:

19. Representar o plano ω , definido pelas rectas passantes que se cruzam no ponto $l(-4;6;5)$:

- a, cuja projecção frontal faz $30^\circ ad$;
- b, cuja projecção horizontal faz $65^\circ ad$.

Determinar o rebatimento do plano:

20. Representar o plano ρ , definido por duas rectas que se cruzam no ponto $l(1;-4;4)$:

- c, cujas projecções frontal e horizontal fazem $45^\circ ae$ e $70^\circ ae$, respectivamente;
- d, cujas projecções frontal e horizontal fazem $50^\circ ad$ e $55^\circ ae$, respectivamente.

Determinar o rebatimento do plano.

21. Representar o plano ψ , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(1;5;-5)$:

- r, passante num ponto com $-3cm$ de abcissa;
- s, passante num ponto com $6cm$ de abcissa.

Determinar o rebatimento do plano.

22. Representar o plano δ definido pelas rectas:

- n, horizontal, com $2cm$ de cota, fazendo $40^\circ ae$;
- r, oblíqua passante, fazendo a sua projecção frontal $60^\circ ad$, sendo concorrente com a anterior no seu ponto do $\beta_{1/3}$.

Determinar o rebatimento do plano.

23. Representar o plano σ definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(0;0;5)$:

- f, frontal, fazendo $35^\circ ad$;
- s, paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projecção frontal $50^\circ ae$.

Determinar o rebatimento do plano.

24. Representar o plano π , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(2;2;2)$:

- n, horizontal, fazendo $35^\circ ae$;
- f, frontal, fazendo $45^\circ ad$.

Determinar o rebatimento do plano.

25. Representar o plano β , definido pelas rectas:
- a, fronto-horizontal, que contém $P(-4;2;3)$;
- r, oblíqua, que contém $S(-1;4;1)$, fazendo a sua projecção frontal $35^\circ ad$.

Determinar o rebatimento do plano.

26. Representar o plano α , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(2;-2;5)$:

- h, fronto-horizontal;
- s, paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projecção horizontal $50^\circ ad$.

Determinar o rebatimento do plano.

27. Representar o plano θ , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(1;2;5)$:

- a, paralela ao $\beta_{2/4}$, cuja projecção frontal faz $50^\circ ad$;
- b, cujas projecções frontal e horizontal são perpendicular e coincidente com as homónimas da recta a.

Determinar o rebatimento do plano sobre:

- um plano horizontal;
- um plano frontal.

28. Representar o plano ω , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(4;5;-1)$:

- k, paralela ao $\beta_{2/4}$, cuja projecção frontal faz $60^\circ ad$;
- m, cuja projecção frontal coincide com a projecção homónima da outra recta, fazendo a horizontal $40^\circ ae$.

Determinar o rebatimento do plano.

29. Representar o plano ρ , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(2;4;3)$:

- t, de topo;
- r, oblíqua, passante num ponto com $5cm$ de abcissa.

Determinar o rebatimento do plano.

30. Representar o plano ψ , definido pelas rectas que se cruzam no ponto $l(2;-3;3)$:

- v, vertical;
- s, oblíqua do $\beta_{2/4}$, passante num ponto com $-3cm$ de abcissa.

Determinar o rebatimento do plano.

31. Representar o plano δ , definido pelas rectas:

- p, que contém $A(2;1;5)$ e $B(2;6;2)$;
- r, que contém A e $C(-1;3;3)$.

Determinar o rebatimento do plano.

32. Representar o plano σ , definido pelas rectas:

- a, que contém $H(4;4;0)$ e $J(-2;1;5)$;
- b, que contém $K(-5;2;5)$ e é paralela a a.

Determinar o rebatimento do plano.

33. Representar o plano π , definido pelas rectas:

- n, que contém $A(0;1;3)$ e $B(4;4;4)$;
- m, paralela a n contendo $C(-3;3;2)$.

Determinar o rebatimento do plano.

34. Representar o plano α , definido pelas rectas:

- h, fronto-horizontal que contém $P(4;0;5)$;
- u, paralela a h contendo $R(1;3;3)$.

Determinar o rebatimento do plano.

Rotações de segmentos de reta e retas

35. Representar o segmento de reta [AB] e rodá-lo para horizontal.
- A(0;4;3); B(-4;0;5)
36. Representar o segmento de reta [AB] do exercício anterior e rodá-lo para horizontal com 2cm de cota.
37. Representar o segmento de reta [AB] do exercício 35 e rodá-lo para frontal.
38. Representar o segmento de reta [AB] do exercício 35 e rodá-lo para frontal com 3cm de afastamento.
39. Representar o segmento de reta [CD] e rodá-lo para de perfil.
- C(-1;4;5); D(-5;1;3)
40. Representar o segmento de reta [CD] do exercício anterior e rodá-lo para fronto-horizontal.
41. Representar o segmento de reta [CD] do exercício 39 e rodá-lo para fronto-horizontal com 2cm de afastamento e 1,5cm de cota.
42. Representar o segmento de reta [CD] do exercício 39 e rodá-lo para de topo.
43. Representar o segmento de reta [CD] do exercício 39 e rodá-lo para vertical com 3cm de afastamento.
44. Representar a reta r que contém o ponto E (4;4;3) e é paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projeção frontal $35^\circ ad$. Rodá-la para frontal com 2cm de afastamento.
45. Representar a reta r do exercício anterior e rodá-la para horizontal utilizando um eixo enviesado.
46. Representar a reta r do exercício 44 e rodá-la para de perfil.
47. Representar a reta r do exercício 44 e rodá-la para fronto-horizontal do $\beta_{1/3}$, com 4cm de cota.
48. Representar a reta s, passante no ponto de abscissa nula, fazendo as suas projeções frontal e horizontal $30^\circ ae$ e $45^\circ ae$, respetivamente. Rodá-la para vertical com 3cm de afastamento.
49. Representar a reta s do exercício anterior e rodá-la para de topo com -2cm de cota.
50. Representar a reta s do exercício 48 e rodá-la de modo a que coincida com o eixo x.
51. Representar a reta s do exercício 48 e rodá-la 90° com um eixo enviesado.
52. Representar a reta s do exercício 48 e rodá-la para de perfil perpendicular ao $\beta_{1/3}$.

Rotações de planos

53. Representar o plano α , cujos traços frontal e horizontal fazem $60^\circ ad$ e $30^\circ ae$, respetivamente. Rodar esse plano para a posição de topo.
54. Representar o plano α do exercício anterior e rodá-lo para a posição vertical.
55. Representar o plano α do exercício 53 e rodá-lo para a posição de rampa.
56. Representar o plano π , cujos traços frontal e horizontal fazem $40^\circ ae$ e $55^\circ ae$, respetivamente. Rodar esse plano para a posição horizontal.
57. Representar o plano π do exercício anterior e rodá-lo para a posição frontal.
58. Representar o plano π do exercício 56 e rodá-lo para a posição de perfil.
59. Representar o plano θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço frontal faz $50^\circ ae$. Rodar esse plano para a posição de rampa.
60. Representar o plano θ do exercício anterior e rodá-lo para a posição de perfil.

Rotações de planos definidos por retas e por pontos

61. Representar o plano ρ , definido pelas retas que se cruzam no ponto I(2;2;1):
- r, paralela ao $\beta_{1/3}$, fazendo a sua projeção frontal $55^\circ ae$;
- s, cujas projeções frontal e horizontal fazem $45^\circ ad$ e $25^\circ ad$, respetivamente.
Rodar esse plano para a posição de topo.
62. Representar o plano ρ do exercício anterior e rodá-lo para a posição vertical.
63. Representar o plano ρ do exercício 61 e rodá-lo para a posição de rampa.
64. Representar o plano ω , definido pelos pontos P(4;3;4), Q(2;6;6) e R(2;0;3). Rodar esse plano para a posição horizontal.
65. Representar o plano ω do exercício anterior e rodá-lo para a posição frontal com afastamento negativo.
66. Representar o plano ω do exercício 64 e rodá-lo para a posição de perfil.
67. Representar o plano ψ , definido pela reta d_{ψ} , que contém o ponto D(2;3;4) cujas projeções frontal e horizontal fazem $60^\circ ad$ e $45^\circ ae$, respetivamente. Rodar esse plano para a posição horizontal.
68. Representar o plano ψ do exercício anterior e rodá-lo para a posição de perfil.

Mudanças de planos aplicadas a segmentos de reta e retas

69. Representar o segmento de reta [AB] e mudá-lo para horizontal com 2cm de cota.

- A(0;4;3); B(-4;0;5)

70. Representar o segmento de reta [AB] do exercício 69 e mudá-lo para frontal com 3cm de afastamento.

71. Representar o segmento de reta [CD] e mudá-lo para de perfil.

- C(-1;4;5); D(-5;1;3)

72. Representar o segmento de reta [CD] do exercício anterior e mudá-lo para fronto-horizontal.

73. Representar o segmento de reta [CD] do exercício 71 e mudá-lo para fronto-horizontal com 2cm de afastamento e 1,5cm de cota.

74. Representar o segmento de reta [CD] do exercício 71 e mudá-lo para de topo.

75. Representar o segmento de reta [CD] do exercício 71 e mudá-lo para vertical com 3cm de afastamento.

76. Representar a reta r que contém o ponto $E(4;4;3)$ e é paralela ao $\beta_{2/4}$, fazendo a sua projeção frontal $35^\circ ad$. Mudá-la para frontal com 2cm de afastamento.

77. Representar a reta r do exercício 76 e mudá-la para de perfil.

78. Representar a reta r do exercício 76 e mudá-la para fronto-horizontal do $\beta_{1/3}$, com 2,5cm de cota.

79. Representar a reta s , passante no ponto de abscissa nula, fazendo as suas projeções frontal e horizontal $30^\circ ae$ e $45^\circ ae$, respetivamente. Mudá-la para vertical com 3cm de afastamento.

80. Representar a reta s do exercício anterior e mudá-la para de topo com -2cm de cota.

81. Representar a reta s do exercício 79 e mudá-la de modo a que coincida com o eixo x .

82. Representar a reta s do exercício 79 e mudá-la para de perfil perpendicular ao $\beta_{1/3}$.

Mudanças de planos aplicadas a planos

83. Representar o plano α , cujos traços frontal e horizontal fazem $60^\circ ad$ e $30^\circ ae$, respetivamente. Mudar esse plano para a posição de topo.

84. Representar o plano α do exercício anterior e mudá-lo para a posição vertical.

85. Representar o plano α do exercício 83 e mudá-lo para a posição de rampa.

86. Representar o plano π , cujos traços frontal e horizontal fazem $40^\circ ae$ e $55^\circ ae$, respetivamente. Mudar esse plano para a posição horizontal.

87. Representar o plano π do exercício anterior e mudá-lo para a posição frontal.

88. Representar o plano π do exercício 86 e mudá-lo para a posição de perfil.

89. Representar o plano θ , perpendicular ao $\beta_{2/4}$, cujo traço frontal faz $50^\circ ae$. Mudar esse plano para a posição de rampa.

90. Representar o plano θ do exercício anterior e mudá-lo para a posição de perfil.

Mudanças de planos aplicadas a planos definidos por retas

91. Representar o plano ρ , definido pelas retas que se cruzam no ponto $I(2;2;1)$:

- r , paralela ao $\beta_{1/3}$, fazendo a sua projeção frontal $55^\circ ae$;

- s , cujas projeções frontal e horizontal fazem $45^\circ ad$ e $25^\circ ad$, respetivamente.

Mudar esse plano para a posição de topo.

92. Representar o plano ρ do exercício anterior e mudá-lo para a posição vertical.

93. Representar o plano ρ do exercício 91 e mudá-lo para a posição de rampa.

94. Representar o plano ω , definido pelos pontos $P(4;3;4)$, $Q(2;6;6)$ e $R(2;0;3)$. Mudar esse plano para a posição horizontal.

95. Representar o plano ω do exercício anterior e mudá-lo para a posição frontal com afastamento negativo.

96. Representar o plano ω do exercício 94 e mudá-lo para a posição de perfil.

97. Representar o plano ψ , definido pela reta d_ψ , que contém o ponto $D(2;3;4)$ cujas projeções frontal e horizontal fazem $60^\circ ad$ e $45^\circ ae$, respetivamente. Mudar esse plano para a posição horizontal.

98. Representar o plano ψ do exercício anterior e mudá-lo para a posição de perfil.