

# 1

## PONTO E SEGMENTO DE RETA

Neste capítulo aborda-se essencialmente o Ponto, elemento geométrico mais simples. Resultado da união de dois pontos, aborda-se também o Segmento de Reta. Com esses elementos são explicados alguns aspetos cruciais que ajudarão a compreender as Retas e os Planos, assim como outras figuras geométricas tratadas nos diferentes capítulos.

Sumário:

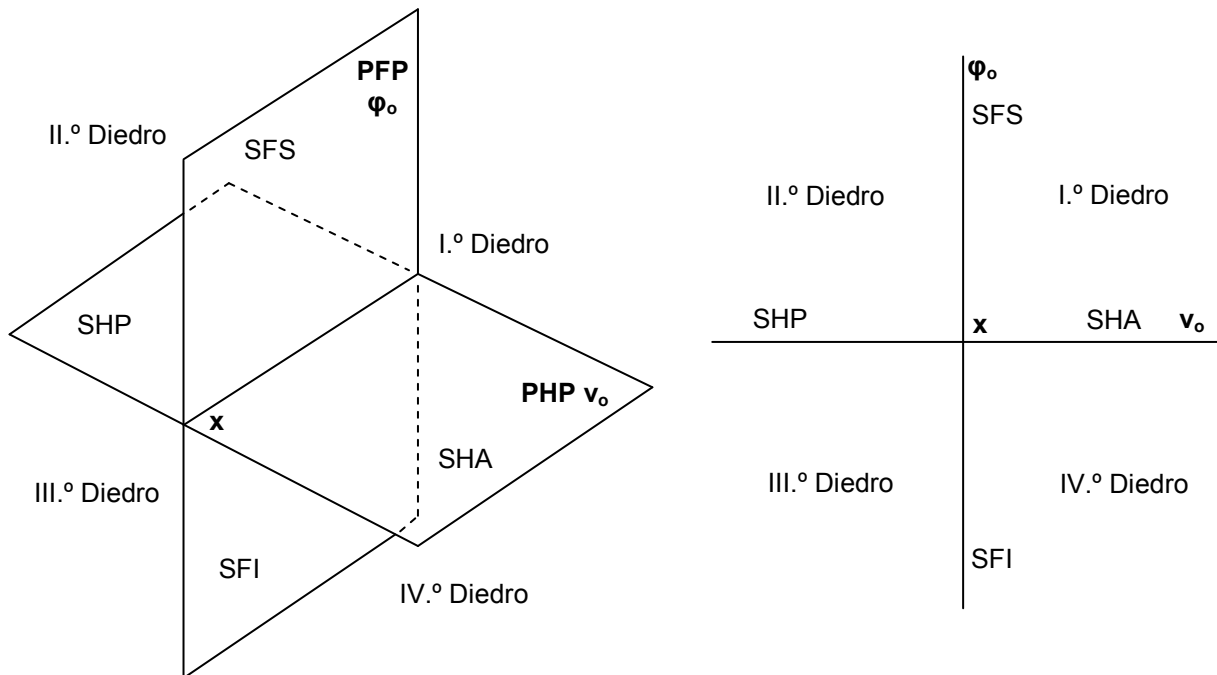
2. Os planos de projeção
3. Os planos bissetores
4. As projeções do ponto
5. As duas coordenadas do ponto
6. O alfabeto do ponto
7. Pontos simétricos
8. A projeção lateral do ponto
9. As três coordenadas do ponto
10. Os segmentos de reta no espaço
11. As projeções dos segmentos de reta
12. A projeção lateral dos segmentos de reta
13. Exercícios

## Os planos de projeção

A Geometria Descritiva é um sistema diédrico, ou seja, um sistema que utiliza dois planos de projeção. Um deles é vertical e designa-se por Plano Frontal de Projeção (PFP), ou  $\varphi_0$  (fi zero); o outro é horizontal e designa-se por Plano Horizontal de Projeção (PHP), ou  $v_0$  (niu zero). Esses planos cruzam-se numa reta que se designa por eixo  $x$ .

O eixo  $x$  divide os planos de projeção em semiplanos: no Plano Frontal de Projeção existe o Semiplano Frontal Superior (SFS) e o Semiplano Frontal Inferior (SFI); no Plano Horizontal de Projeção existe o Semiplano Horizontal Anterior (SHA) e o Semiplano Horizontal Posterior (SHP).

Os planos de projeção dividem o espaço em quatro porções, designadas por diedros: I.º, II.º, III.º e IV.º.



### Os planos de projeção em perspectiva

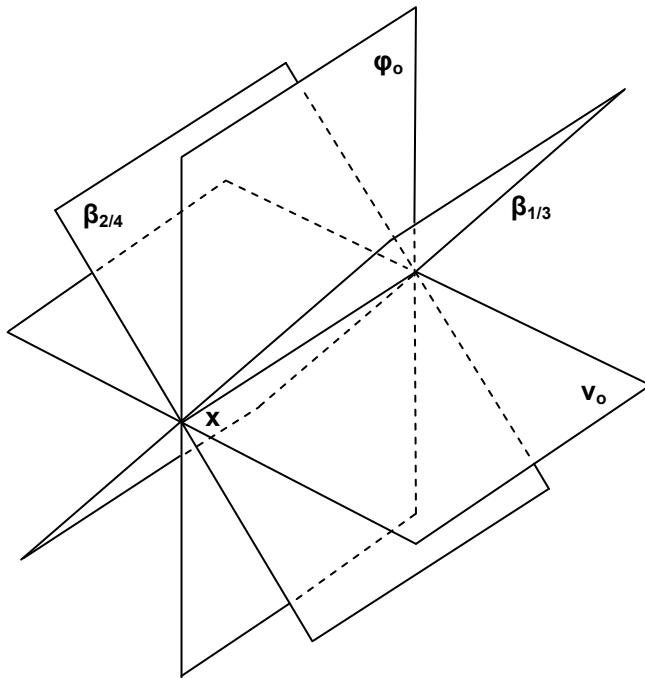
Esta perspectiva mostra os planos de projeção, os semiplanos, o eixo  $x$  e os diedros. É este o sistema básico utilizado em Geometria Descritiva. Normalmente representa-se nesta posição, supondo o observador situado no I.º diedro, à esquerda.

### Os planos de projeção vistos de lado

Representados de lado, os planos de projeção ficam reduzidos a duas retas e o eixo  $x$  reduzido a um ponto. Normalmente representa-se nesta posição, com o I.º diedro em cima, à direita, supondo que o observador se encontra do lado esquerdo.

## Os planos bissetores

Além dos planos de projeção, existem também os planos bissetores. Os planos bissetores dividem os diedros em espaços iguais, chamados octantes. Ou seja, devido à presença dos planos bissetores, cada diedro fica dividido em dois octantes. O  $\beta_{1/3}$  é o plano que divide a meio os diedros I e III; o  $\beta_{2/4}$  divide os diedros II e IV. Estes planos não são utilizados como planos de projeção.

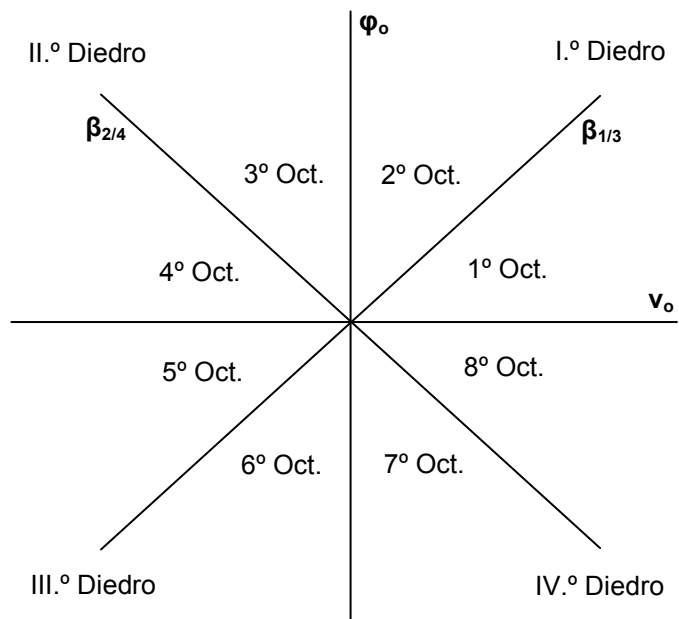


### Os planos bissetores e os planos de projeção em perspectiva

Os planos bissetores dividem os diedros em espaços iguais, chamados octantes. Como se pode verificar, planos de projeção e planos bissetores cruzam-se no eixo  $x$ . Chama-se  $\beta_{1/3}$  ao bissetor dos diedros ímpares e  $\beta_{2/4}$  ao bissetor dos diedros pares.

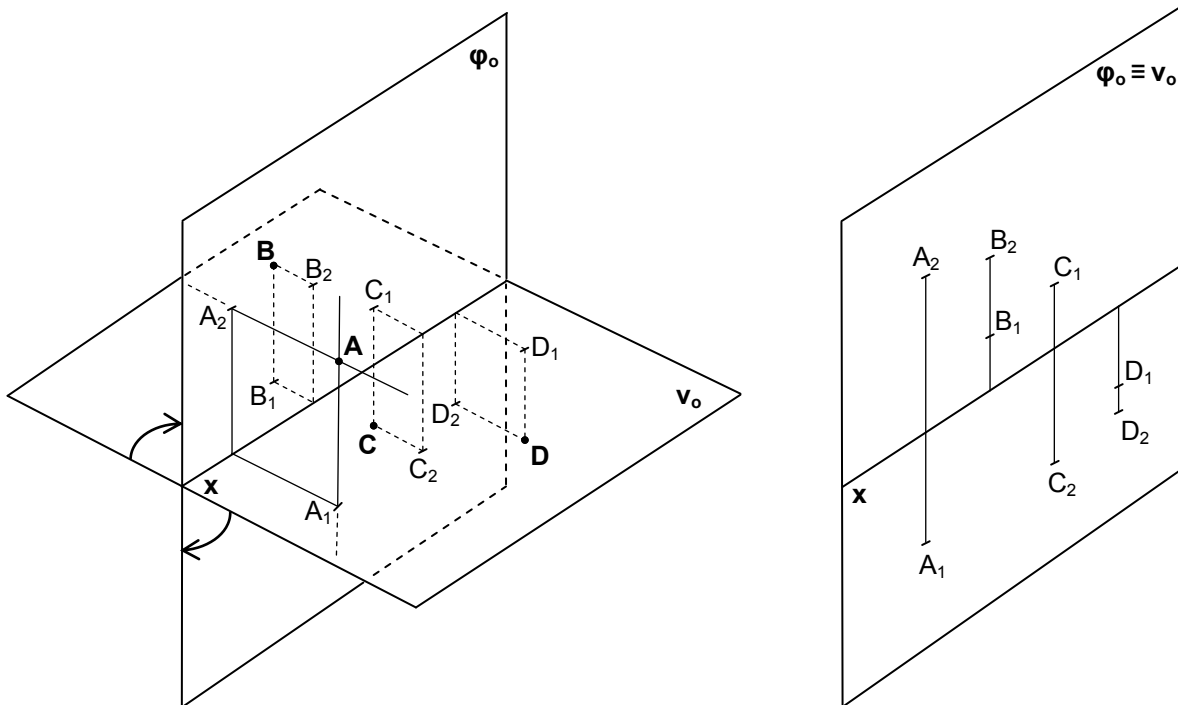
### Os diedros e os octantes vistos de lado

Nesta imagem mostra-se como se distribuem os diedros e os octantes ao longo do espaço. Cada diedro contém dois octantes. A contagem, de uns e de outros, faz-se do Semiplano Horizontal Anterior para cima.



## As projeções do ponto

Na Geometria Descritiva trabalha-se habitualmente com projeções ortogonais, o que significa que as figuras geométricas são projetadas do espaço para os planos de projeção através de retas que lhes são perpendiculares.

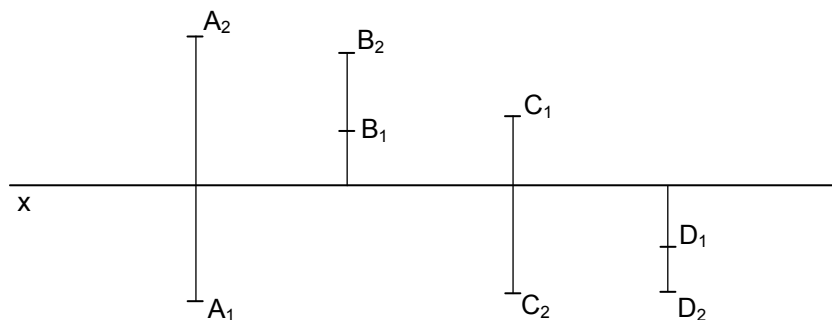


### Projeções de pontos em perspectiva

Os pontos são projetados do espaço para os planos de projeção através de retas que são perpendiculares aos planos, designadas por projetantes. Aqui, essas retas estão representadas apenas no ponto  $A$ , para não sobrecarregar o traçado.

### As projeções após o rebatimento

Rodando em torno do eixo  $x$ , os planos de projeção ficam coincidentes. Nesse movimento, designado por rebatimento, os diedros I e III abrem, os diedros II e IV fecham. Aqui rebatemos o PHP sobre o PFP, mas se for ao contrário o mesmo, aquele que se mostra na imagem seguinte.



### As projeções dos pontos na representação final

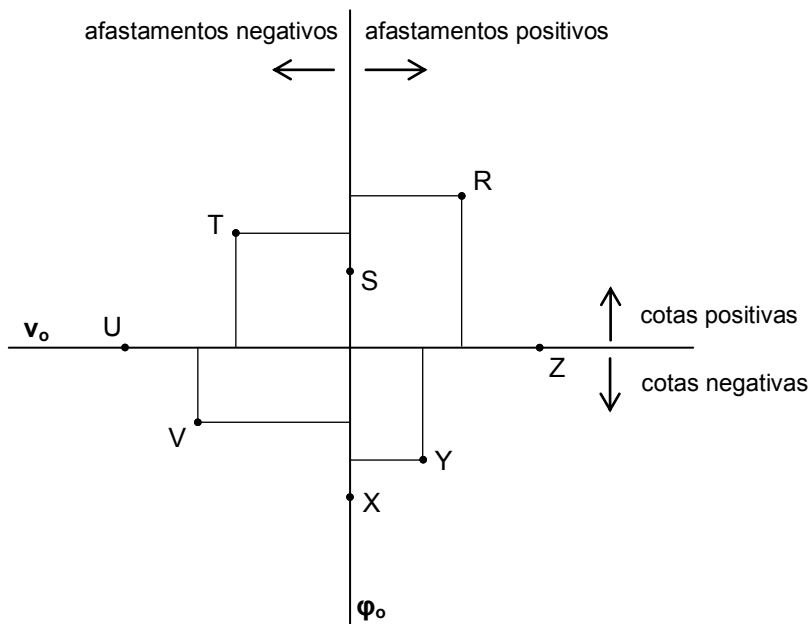
Depois de projetados os pontos e de efetuado o rebatimento, as representações finais dos pontos ficam como mostra esta imagem. Note-se que os pontos  $A, B, C$  e  $D$  se situam nos diedros I, II, III e IV, respetivamente.

## As duas coordenadas do ponto

Para representar pontos (e as outras figuras geométricas) consideram-se três coordenadas: abcissa, afastamento e cota. Aqui explica-se em que consistem o afastamento e a cota. A abcissa é explicada mais adiante, em “As três coordenadas de um ponto”.

Por vezes, para representar pontos (e outras figuras) nem sempre se utilizam as três coordenadas, bastando trabalhar apenas com afastamentos e cotas, como sucede aqui.

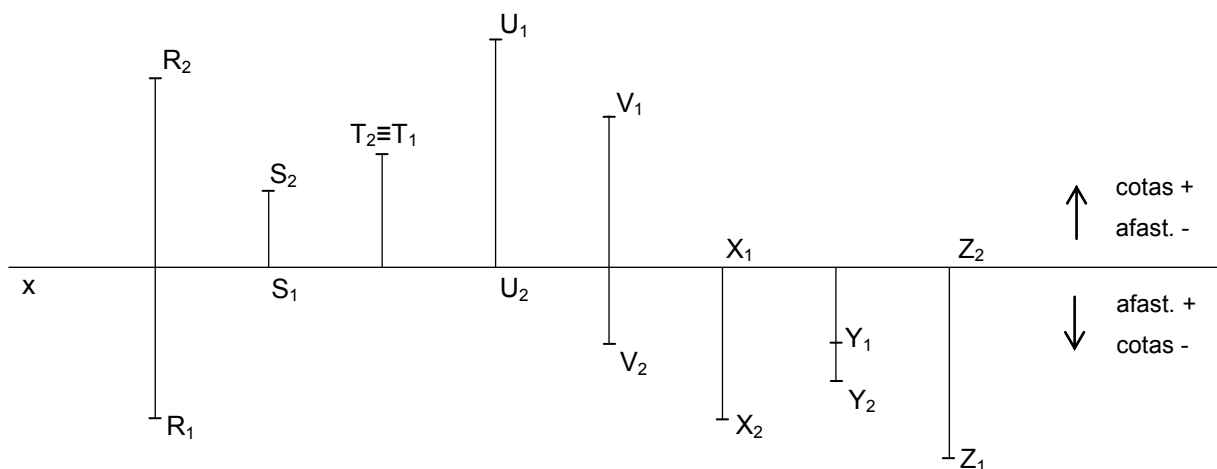
As medidas das coordenadas são dadas em centímetros.



### Coordenadas dos pontos representados:

- R(1,5;2)
- S(0;1)
- T(-1,5;1,5)
- U(-3;0)
- V(-2;-1)
- X(0;-2)
- Y(1;-1,5)
- Z(2,5;0)

O primeiro valor corresponde ao afastamento, o segundo à cota, separados por ponto e vírgula.

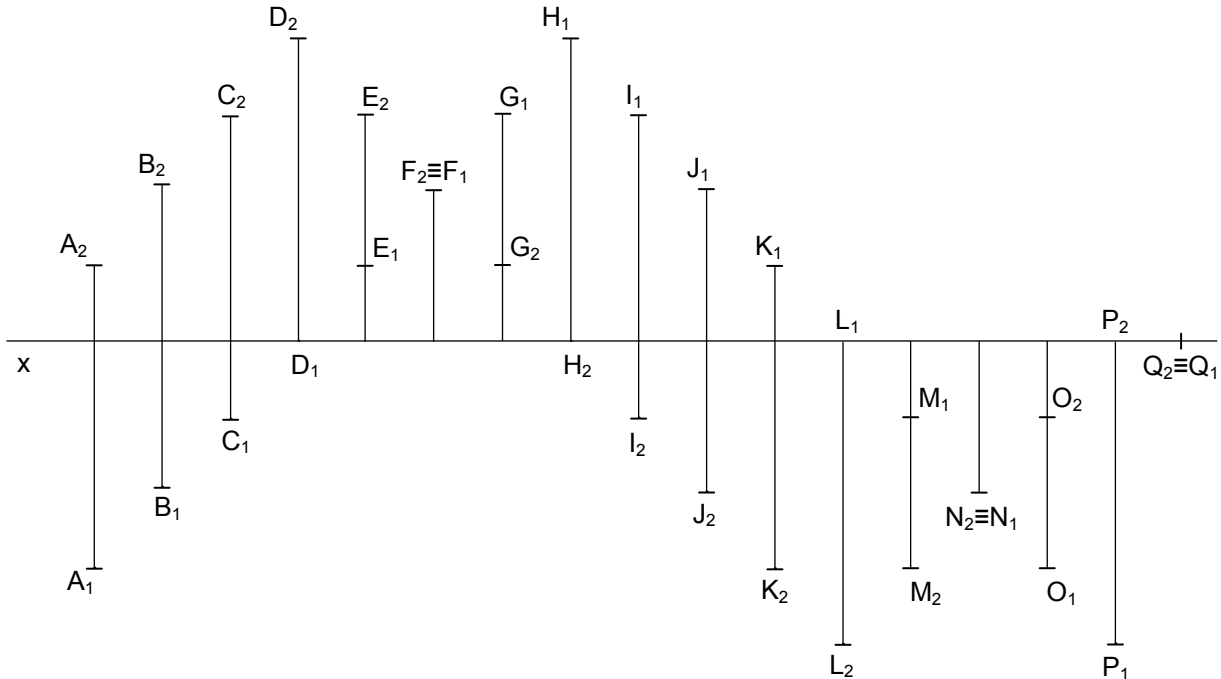


### Projeções dos pontos dados

Os pontos dados pelas suas coordenadas estão representados nos planos de projeção vistos de lado, na primeira imagem; nesta estão representados pelas suas projeções. Como se pode verificar, cotas positivas e afastamentos negativos originam projeções para cima do eixo x; afastamentos positivos e cotas negativas originam projeções para baixo do eixo x.

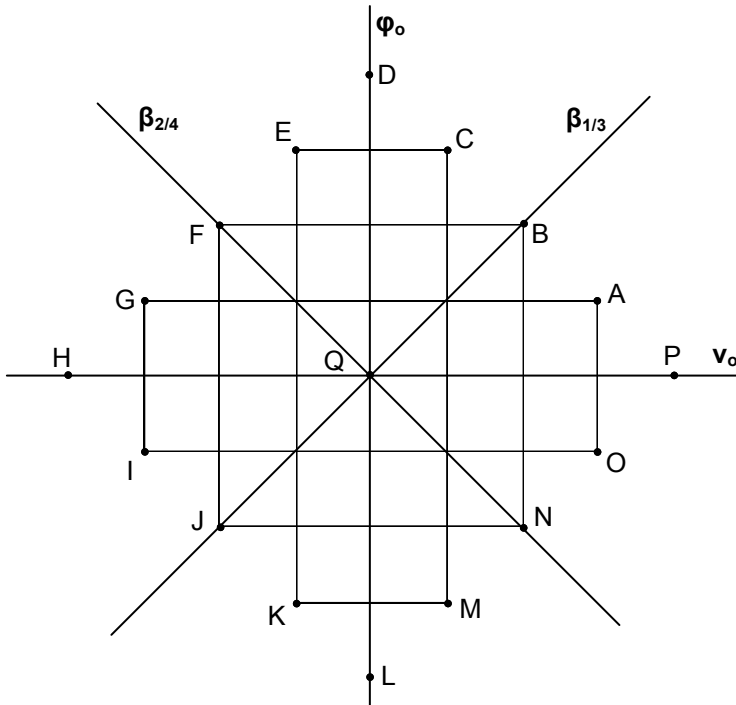
## O alfabeto do ponto

O alfabeto do ponto é o conjunto de todas as posições genéricas que os pontos podem ter em relação aos planos de projeção.



### Posições genéricas dos pontos representadas nas projeções

Os pontos A, B e C têm a projeção frontal para cima do eixo x e a horizontal para baixo, esses pontos situam-se no I.º diedro; os pontos E, F e G têm ambas as projeções para cima do eixo x, situam-se no II.º diedro; os pontos I, J e K têm a projeção frontal para baixo do eixo x e a horizontal para cima, situam-se no III.º diedro; os pontos M, N e O têm ambas as projeções para baixo do eixo x, situam-se no IV.º diedro. Os pontos D, H, L e P têm uma projeção no eixo x, situam-se nos planos de projeção; os pontos B, F, J e N têm projeções com medidas iguais (em valores absolutos), situam-se nos planos bissetores; o ponto Q situa-se no eixo x.



### Posições genéricas dos pontos vistas de lado

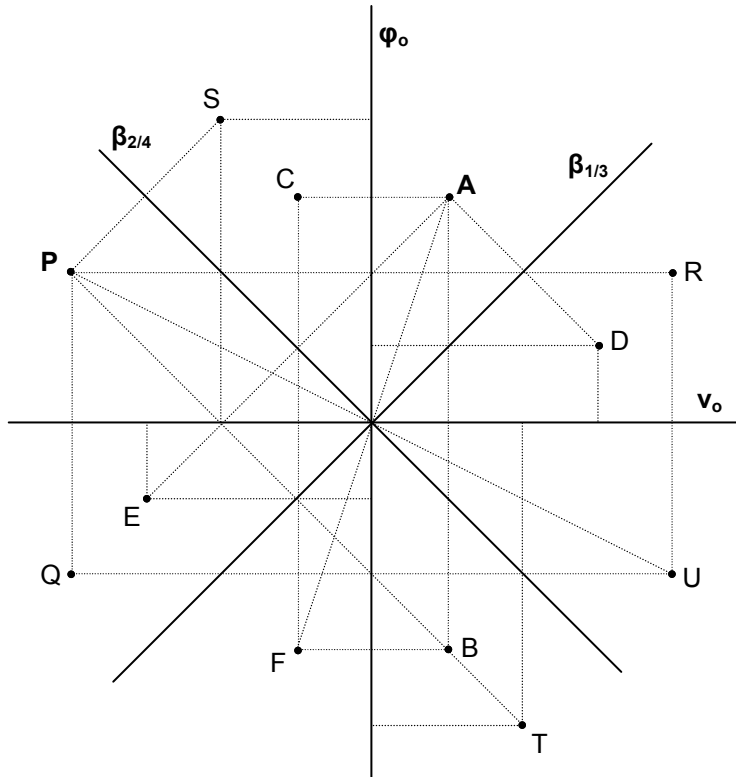
Os pontos representados na imagem ao lado são os mesmos que se apresentam em projeções na imagem de cima. Aqui pode-se observar com mais clareza os diedros, octantes e planos onde se situam. As coordenadas destes pontos são:

A(3;1)	B(2;2)	C(1;3)
D(0;4)	E(-1;3)	F(-2;2)
G(-3;1)	H(-4,0)	I(-3;-1)
J(-2;-2)	K(-1;-3)	L(0;-4)
M(1;-3)	N(2;-2)	O(3;-1)
P(4;0)	Q(0;0)	

## Pontos simétricos

A determinação de pontos simétricos é importante para exercitar a marcação de pontos e para melhor trabalhar com as coordenadas e conhecer o sistema de planos utilizado nesta disciplina.

Toma-se um ponto como referência e determinam-se os seus simétricos em relação aos planos de projeção, aos planos bissetores e ao eixo x.



### Determinação de pontos simétricos

Os pontos de referência utilizados nesta imagem são os seguintes:

$$A(1;3) \quad P(-4;2)$$

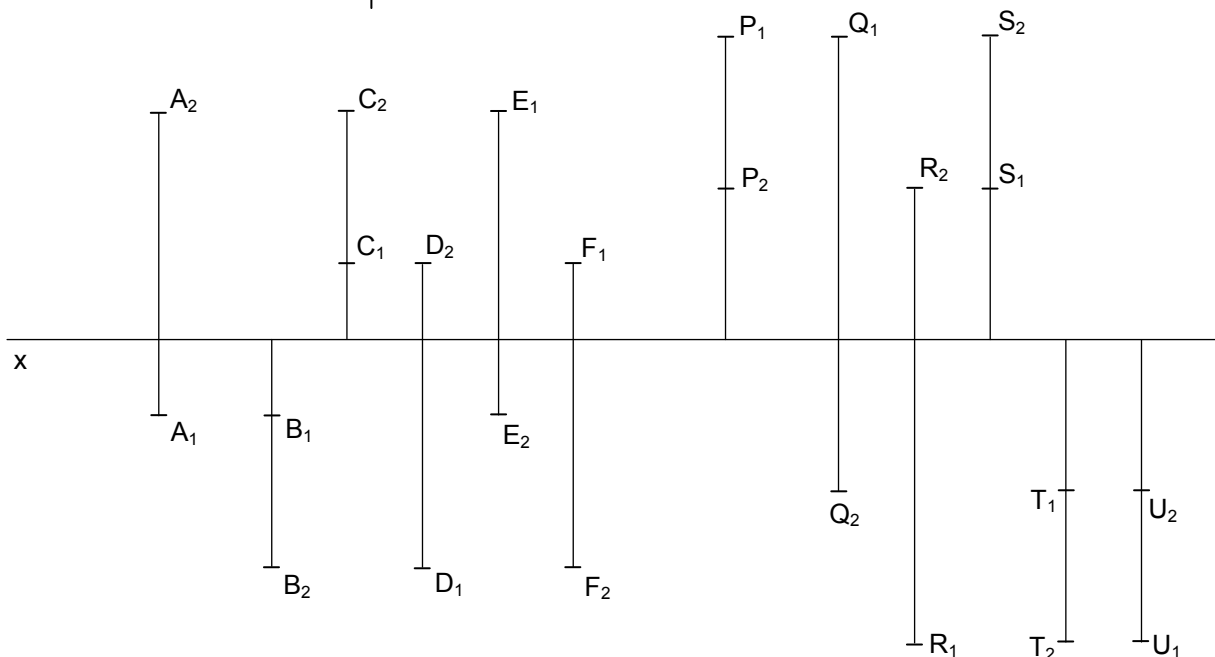
Os simétricos de A são:

- B(1;-3) - simétrico em relação ao PHP
- C(-1;3) - simétrico em relação ao PFP
- D(3;1) - simétrico em relação ao  $\beta_{1/3}$
- E(-3;-1) - simétrico em relação ao  $\beta_{2/4}$
- F(-1;-3) - simétrico em relação ao eixo x

Os simétricos de P são:

- Q(-4;-2) - simétrico em relação ao PHP
- R(4;2) - simétrico em relação ao PFP
- S(-2;4) - simétrico em relação ao  $\beta_{2/4}$
- T(2;-4) - simétrico em relação ao  $\beta_{1/3}$
- U(4;-2) - simétrico em relação ao eixo x

As coordenadas dos pontos simétricos mantêm os valores absolutos dos do ponto de referência.



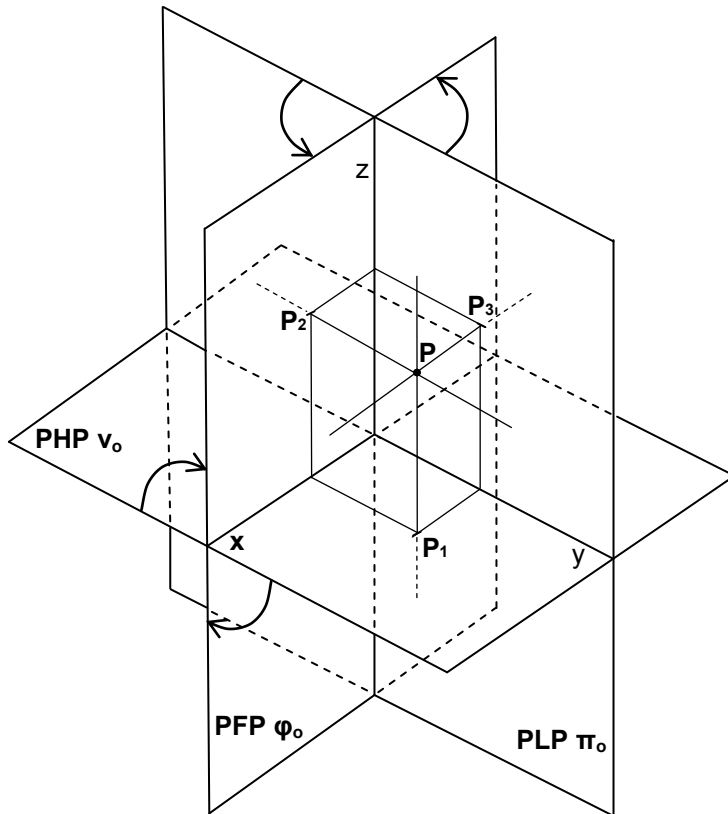
### Projeções dos pontos representados na imagem anterior

Aqui estão representados os pontos de referência, A e P, e os seus simétricos em relação aos planos de projeção, aos planos bissetores e ao eixo x, de acordo com a vista de lado, que se observa na imagem anterior.

## A projeção lateral do ponto

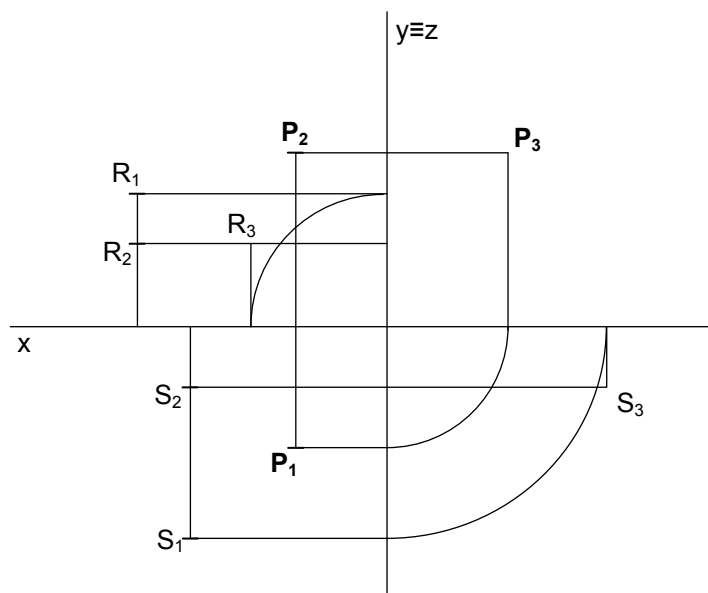
Além das projeções frontal e horizontal, por vezes há necessidade de recorrer a uma terceira projeção que se designa por projeção lateral, muito útil nalguns capítulos.

A projeção lateral obtém-se no plano lateral de projeção (PLP), ou  $\pi_0$  (pi zero), que corresponde ao plano da abcissa nula, perpendicular aos outros dois planos de projeção. Esse plano, ao cruzar-se com os outros, dá origem aos eixos y e z. O eixo y resulta do cruzamento com o PHP, o eixo z do cruzamento com o PFP.



### As três projeções de um ponto em perspectiva

O ponto P é projetado no PHP em  $P_1$ , no PFP em  $P_2$  e no PLP em  $P_3$ . Depois de feitas as projeções, os planos rebatem conforme mostram as setas. O primeiro rebatimento a considerar é o do PHP, só depois de faz o rebatimento do PLP. Do primeiro rebatimento resulta a coincidência dos eixos y e z.



### A projeção lateral de um ponto

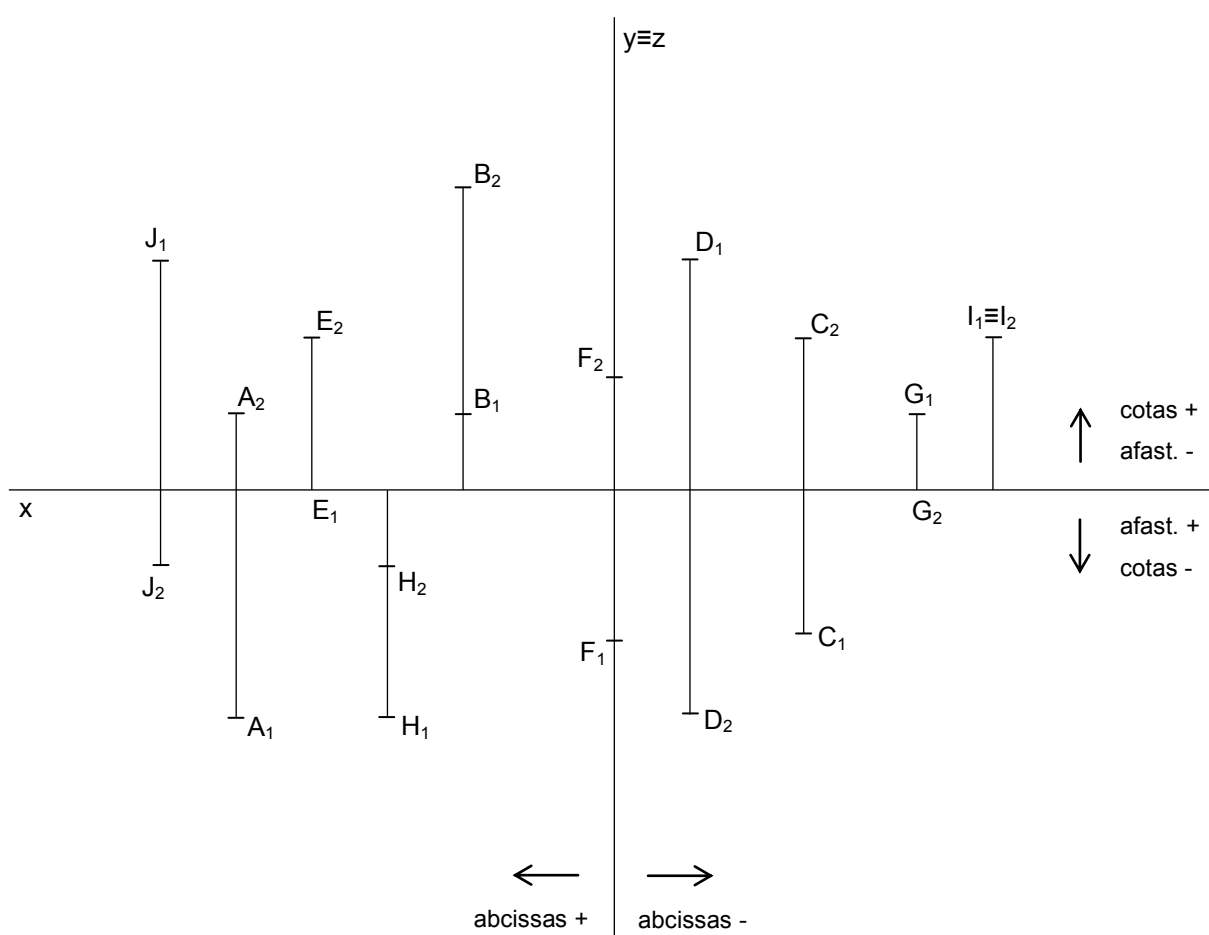
A projeção lateral obtém-se com linhas de chamada paralelas ao eixo x e com uma rotação feita com o compasso colocado no ponto de cruzamento dos eixos. A rotação do compasso faz-se sempre no sentido inverso ao dos ponteiros do relógio. O ponto P corresponde ao que está representado em perspectiva; o ponto R encontra-se no segundo diedro e o S no quarto, não estando representados na imagem anterior.



## As três coordenadas do ponto

Muitas das vezes é necessário utilizar também, além do afastamento e da cota, a abscissa. O plano de referência para a abscissa é o plano lateral de projeção, ou  $\pi_0$ . À esquerda desse plano as abcissas têm valores positivos, à direita têm valores negativos. Nas projeções é a reta  $y \equiv z$  que serve de referência para a marcação das abcissas.

Quando são dadas as três coordenadas de um ponto isso não significa que se tem de representar as três projeções. O valor da abscissa serve para situar o ponto ao longo do eixo x, à esquerda ou à direita de  $y \equiv z$ , ou de um ponto de referência marcado no eixo x.



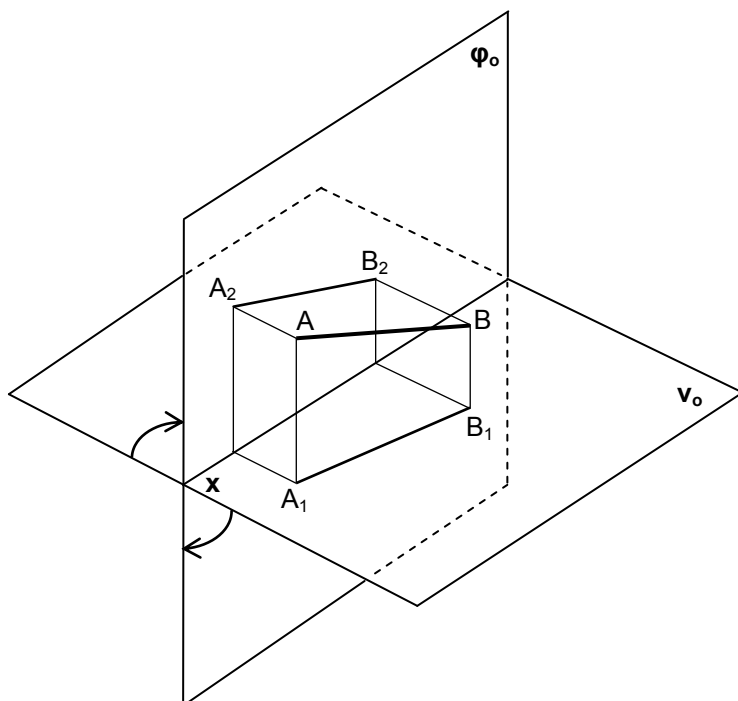
### Coordenadas dos pontos representados:

A(5;3;1)    B(2;-1;4)    C(-2,5;2;2)    D(-1;-3;-3)    E(4;0;2)  
 F(0;2;1,5)    G(-4;-1;0)    H(3;3;-1)    I(-5;-2;2)    J(6;-3;-1)

O primeiro valor corresponde à abscissa, o segundo ao afastamento, o terceiro à cota.

## Os segmentos de reta no espaço

A união de dois pontos dá origem a um segmento de reta. Aqui mostram-se as duas e as três projeções de um segmento de reta no espaço, em perspectiva. Nas páginas seguintes mostram-se segmentos de reta em várias posições, quer em duas quer em três projeções.

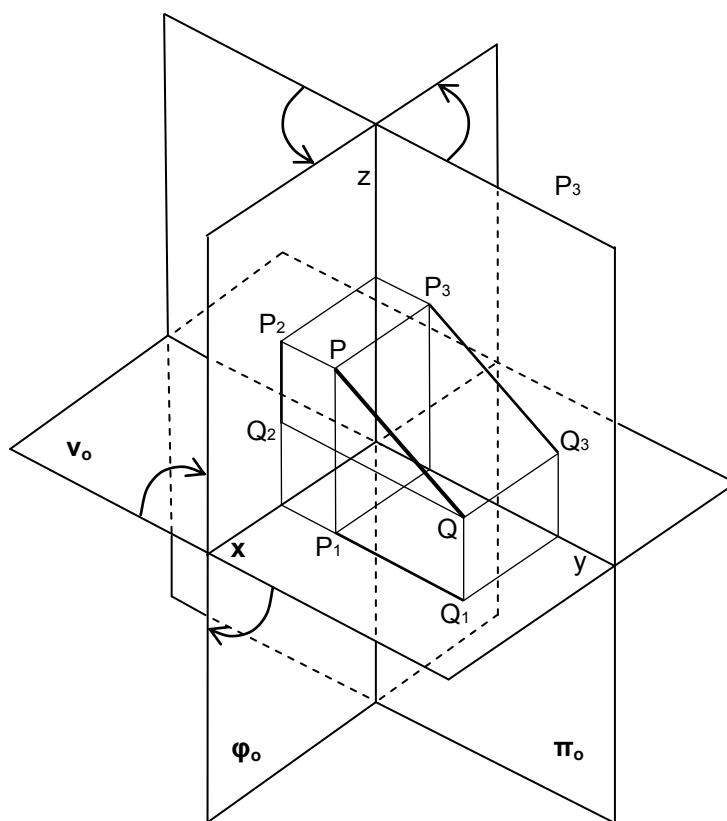


### As duas projeções do segmento de reta

Para obter as projeções do segmento de reta basta unir as projeções dos seus extremos. Obviamente, o segmento pode ter diferentes posições em relação aos planos de projeção, o que leva a que as suas projeções apresentem aspetos diferentes. Aqui exemplifica-se com um segmento de reta oblíquo.

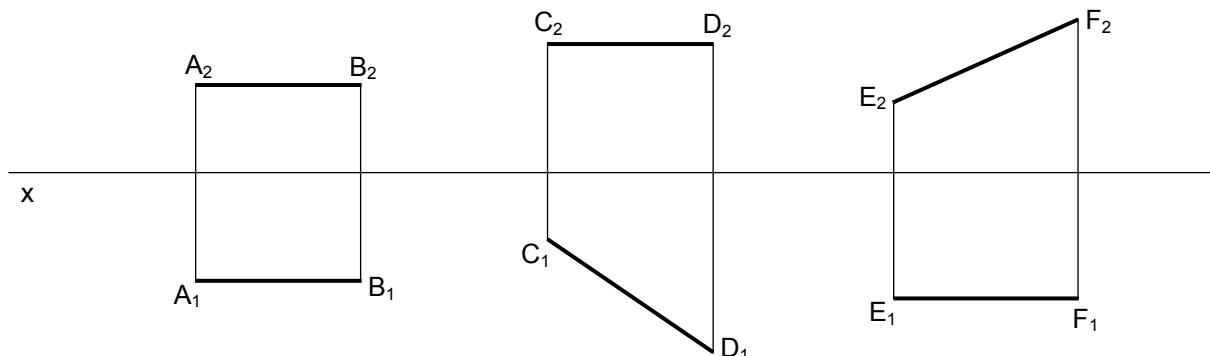
### As três projeções do segmento de reta

Para obter a projeção lateral de um segmento de reta basta unir as projeções laterais dos seus extremos. Consoante a posição do segmento de reta, assim será o aspeto da sua projeção lateral. Exemplifica-se aqui com um segmento de reta de perfil.



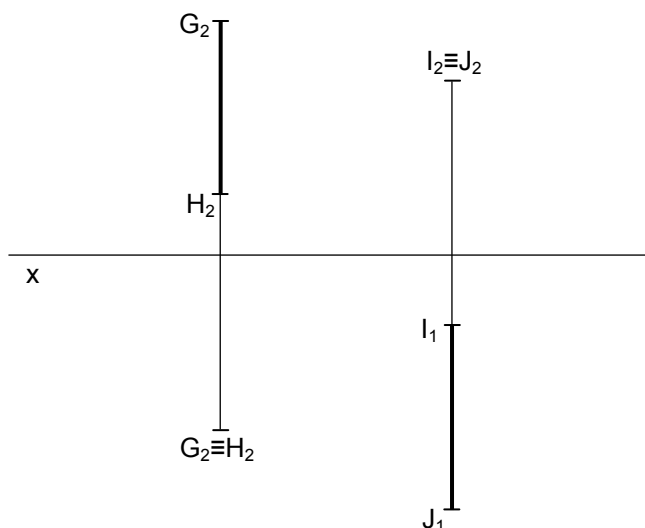
## As projeções dos segmentos de reta

Os segmentos de reta podem ter sete posições genéricas. Essas posições equivalem às da reta, a estudar no capítulo Alfabeto da Reta.



### Segmentos de reta paralelos aos planos de projeção

O segmento de reta [AB] é paralelo a ambos os planos de projeção; essa posição designa-se por fronto-horizontal. O segmento [CD] é paralelo ao PHP e oblíquo ao PFP; designa-se por horizontal. O segmento [EF] é paralelo ao PFP e oblíquo ao PHP; a sua posição é frontal.



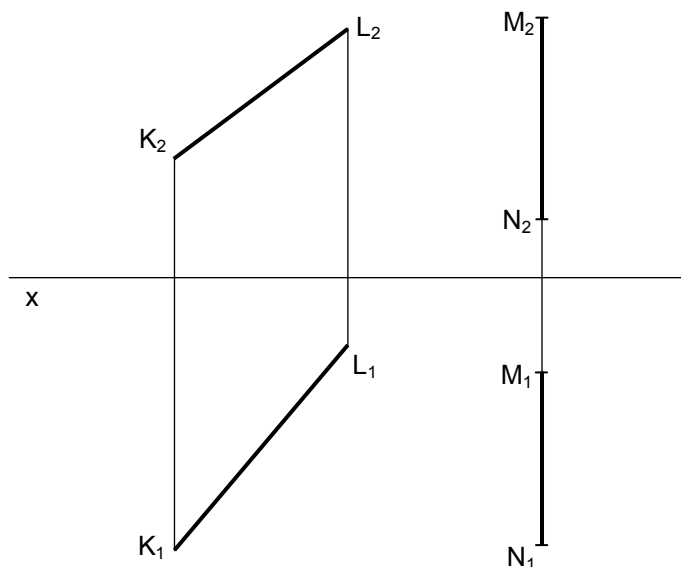
### Segmentos de reta perpendiculares aos planos de projeção

Estes segmentos de reta também são paralelos a um plano de projeção, mas aquilo que aqui se salienta é a sua relação de perpendicularidade com os planos de projeção. O primeiro segmento é perpendicular ao PHP e designa-se por vertical; o segundo é perpendicular ao PFP, sendo de topo.

De notar a coincidência que acontece numa das projeções dos extremos dos segmentos.

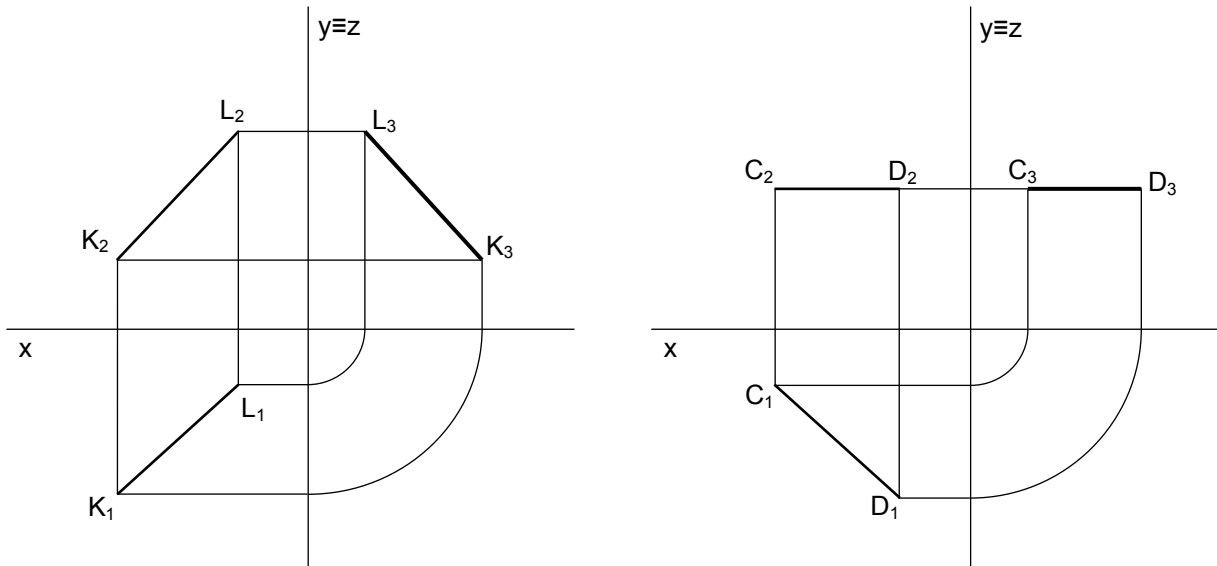
### Segmentos de reta oblíquos aos planos de projeção

Estes segmentos de reta são ambos oblíquos aos planos de projeção. O [KL] é também oblíquo ao eixo x; designa-se por oblíquo. O [MN] é também perpendicular ao eixo x; a sua posição é de perfil.



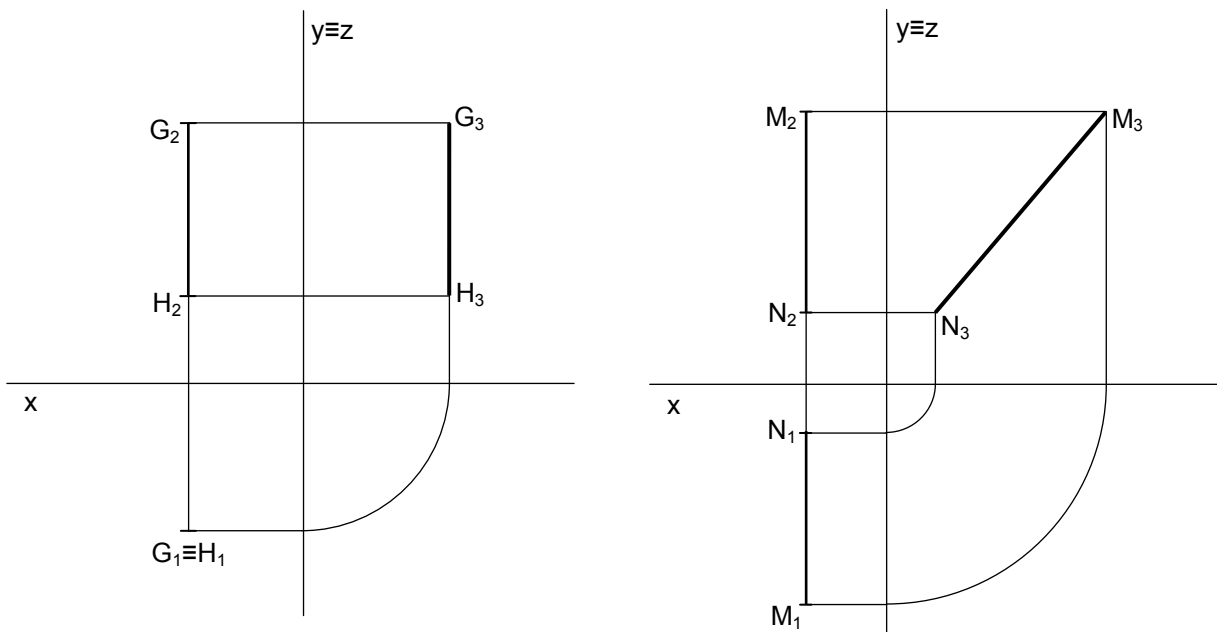
## A projeção lateral dos segmentos de reta

Aqui mostram-se as projeções laterais de alguns segmentos de reta, além das projeções principais. Para as obter basta unir as projeções laterais dos extremos desses segmentos.



### Segmentos de reta oblíquos ao plano lateral de projeção

Aqui mostra-se como se obtém a projeção lateral de um segmento de reta oblíquo e de outro horizontal. O processo é o mesmo para qualquer segmento de reta.



### Segmentos de reta paralelos ao plano lateral de projeção

Normalmente é com segmentos de reta paralelos ao plano lateral de projeção que há interesse em saber da sua projeção lateral, sobretudo em exercícios do capítulo Distâncias. Aqui mostra-se um segmento de reta vertical e outro de perfil.

## Ponto e segmento de reta – Exercícios

### Pontos em dupla projeção

1. Representar, em dupla projeção, os pontos:

A(3;1)      F(-3;3)      J(2;-2)  
B(2;4)      G(4;-1)      K(-1;2)  
C(0;3)      H(0;-3)      L(-4;0)  
D(2;0)      I(-2;-3)      M(0;0)  
E, do  $\beta_{1/3}$ , com -1cm de abcissa

2. Representar, em dupla projeção, os pontos:

N(3;1;2)      S(-5;2;0)      W(-3;0;0)  
O(1;3;1)      T(2;2;-2)      X(3;3;4)  
P(5;-2;4)      U(-6;4;-1)      Y(-4;1;2)  
Q(-2;0;3)      V(6;0;-3)      Z(0;-2;3)  
R, do  $\beta_{2/4}$ , com -4cm de abcissa e -5 de cota

### Pontos em tripla projeção

3. Representar, em tripla projeção, os pontos:

A(3;2;4)      C(2;-4;3)      E(1;1;0)  
B(5;3;-1)      D(6;0;5)      F(4;0;0)

4. Representar, em tripla projeção, os pontos:

G(4;2;-2)      I(-3;1;-3)      K(0;5;0)  
H(2;-3;3)      J(-5;-1;4)

### Pontos simétricos

5. Determinar os pontos simétricos dos seguintes pontos, em relação aos planos de projeção:

A(4;2)      B(3;-1)      C(-2;2)

6. Determinar os pontos simétricos dos seguintes pontos, em relação aos planos bissetores:

D(3;1)      E(-3;4)      F(-2;-2)

7. Determinar os pontos simétricos dos seguintes pontos, em relação aos planos de projeção, aos planos bissetores e ao eixo x:

F(2;-4)      H(-1;-3)

### Segmentos de reta em dupla projeção

8. Representar, em dupla projeção, os segmentos de reta [AB] e [CD] cujos extremos são:

A(8;2;2)      C(2;1;2)  
B(4;4;0)      D(-3;4;-2)

9. Representar, em dupla projeção, os segmentos de reta [EF] e [GH] cujos extremos são:

E(6;0;0)      G(0;1-1)  
F(2;-2;5)      H(-4;0;3)

10. Representar, em dupla projeção, os seguintes segmentos de reta:

[IJ], vertical, com 3cm de tamanho, sendo I(4;3;2) o ponto de menor cota.

[KL], de topo, com 4cm de tamanho, tendo L(-3;0;3) menor afastamento.

11. Representar, em dupla projeção, os seguintes segmentos de reta:

[MN], fronto-horizontal com 3cm de tamanho, sendo N(2;1;2) o ponto mais à direita.

[OP], de perfil cujos extremos são O(-3;1;4) e P(5;1).

12. Representar, em dupla projeção, os seguintes segmentos de reta:

[QR], horizontal com 4cm de tamanho, fazendo  $30^\circ$ ae, estando R(2;0;2) à direita de Q.

[ST], frontal, estando S(-1;-3;2) à esquerda de T, que tem -5cm de abcissa e 1cm de afastamento.

13. Representar, em dupla projeção, os seguintes segmentos de reta:

[UV], conhecendo V(2;4;2), e sabendo que U tem 1cm de afastamento e 6cm de cota e se situa no PHP.

[WX], conhecendo W(-2;-1;4) e X(4;2) e sabendo que a projeção frontal do segmento faz  $30^\circ$ ad.

### Segmentos de reta em tripla projeção

14. Representar, em tripla projeção, o segmento de reta de perfil com 3cm de afastamento, cujos extremos são A(2;5) e B(4;1).

15. Representar, em tripla projeção, o segmento de reta cujos extremos são C(3;4;1) e D(0;2;5).

16. Representar, em tripla projeção, o segmento de reta de perfil cujos extremos são E(4;3;5) e F(-2;1).

17. Representar, em tripla projeção, o segmento de reta cujos extremos são G(3;3;5) e H(-2;3;2).

18. Representar, em tripla projeção, o segmento de reta cujos extremos são I(-4;2;1) e J(-4;5;4).

19. Representar, em tripla projeção, o segmento de reta cujos extremos são K(-3;3;1) e L(-3;3;5).