

13

SOMBRAS I

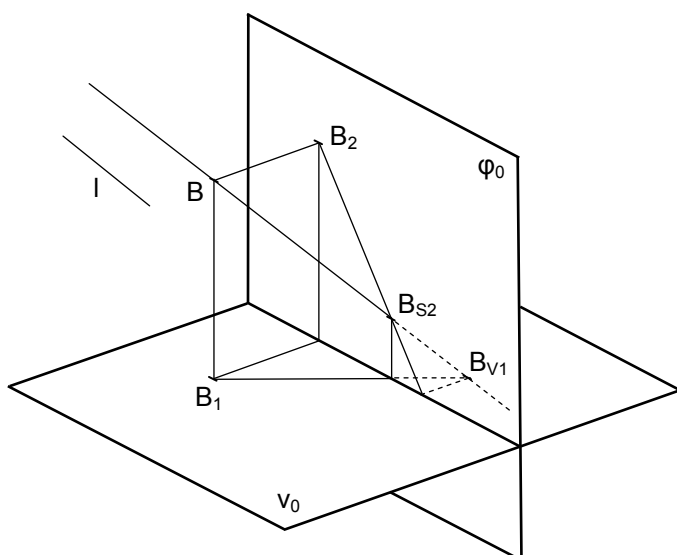
Neste capítulo mostra-se como se determinam sombras de figuras planas sobre os planos de projeção, nomeadamente pontos, segmentos de reta, retas, polígonos e circunferências.

Sumário:

- 2. Sombras do ponto e do segmento de reta no espaço
- 3. Sombras de pontos
- 4, 5 e 6. Sombras de segmentos de reta
- 7. Sombras de retas no espaço
- 8 e 9. Sombras de retas paralelas aos planos de projeção
- 10 e 11. Sombras de retas oblíquas aos planos de projeção
- 12. Sombras de polígonos paralelos aos planos de projeção
- 13 e 14. Sombras de polígonos não paralelos aos planos de projeção
- 15 e 16. Sombras de circunferências paralelas aos planos de projeção
- 17. Sombras da circunferência de perfil
- 18 e 19. Exercícios

Sombras do ponto e do segmento de reta no espaço

Aqui mostra-se como se processa a determinação das sombras de um ponto e de um segmento de reta nos planos de projeção, alertando-se já para as sombras virtuais. De um modo geral considera-se a direção luminosa vindo da esquerda para a direita, pelo que nestes traçados a perspectiva dos planos de projeção se representa a partir de um ponto de vista diferente do habitual.

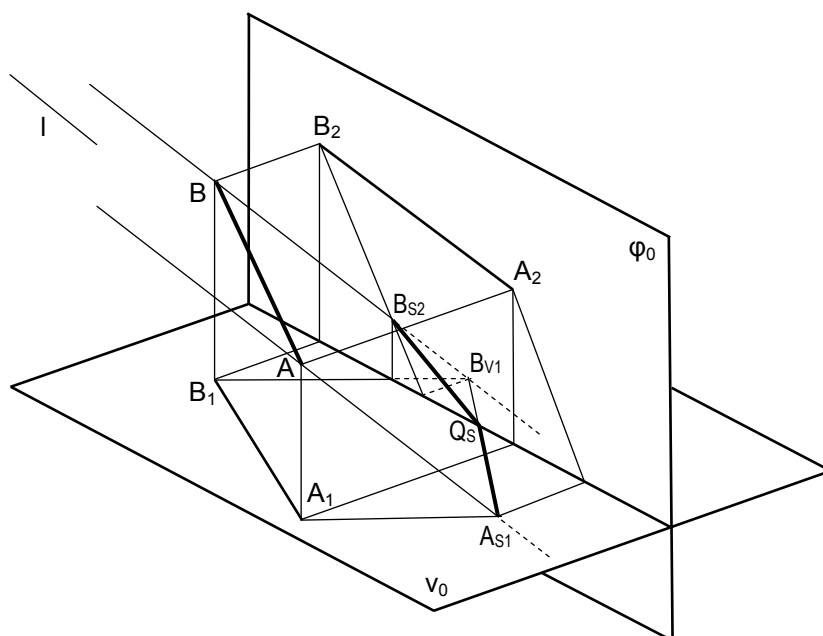


Sombras de um ponto sobre os planos de projeção

O raio de luz paralelo à direção luminosa I, que passa pelo ponto B, vai cruzar os planos de projeção nos pontos B_{S2} e B_{V1} que correspondem, respetivamente, à sombra real do ponto no PFP e à sombra virtual no PHP.

Sombra real é aquela que é visível para o observador colocado no 1.º diedro; sombra virtual é aquela que o ponto teria se o primeiro plano não estivesse interposto, pelo que é invisível para o observador.

Os segmentos de reta $[B_1B_{V1}]$ e aquele que contém $[B_2B_{S2}]$ e se estende até ao eixo x equivalem às projeções do raio de luz que passa pelo ponto B.



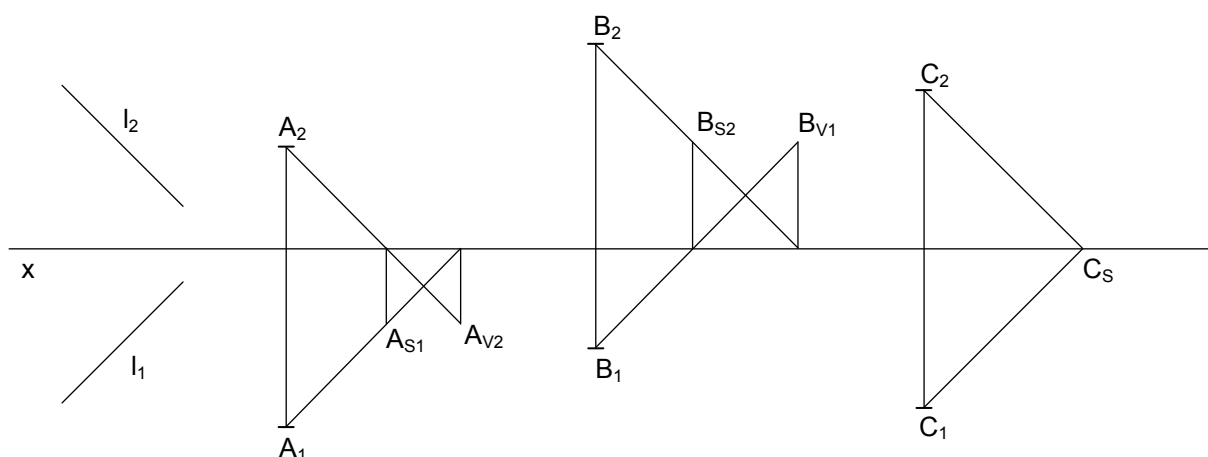
Sombras de um segmento de reta sobre os planos de projeção

Aproveitando o ponto B da primeira situação, temos aqui a sombra do segmento $[AB]$. Este segmento projeta sombra sobre os dois planos de projeção, pelo que existe um ponto de quebra no eixo x a uni-los. Para determinar a sombra real do segmento de reta recorreu-se à sombra virtual de B, que se uniu à sombra real de A, o que permitiu determinar a sombra sobre o PHP. Unindo o ponto de quebra Q à sombra real de B obtém-se a sombra do segmento sobre o PFP. Nestas situações basta determinar a sombra virtual de um dos pontos.

Sombras de pontos

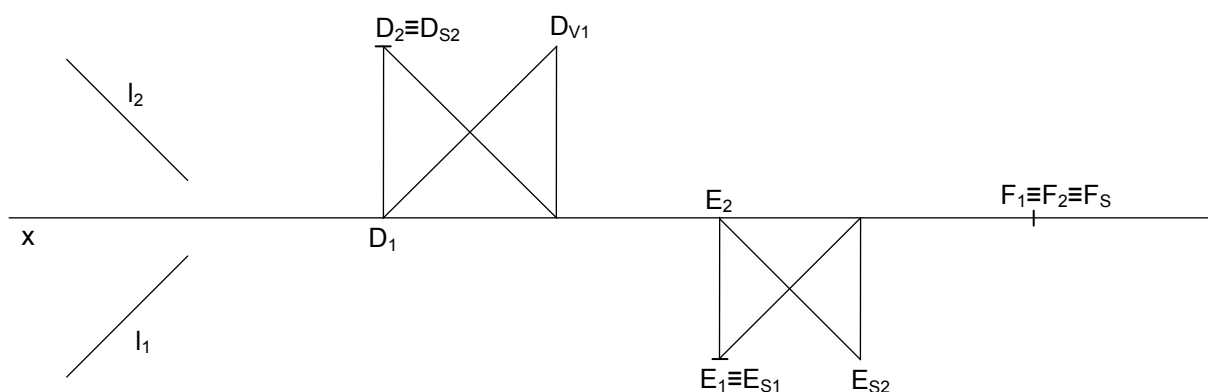
Consideram-se dois tipos de sombras: reais e virtuais. A sombra real de um ponto é sempre a primeira que se projeta num plano de projeção; a sombra virtual é sempre a que se projeta no segundo plano. Se a sombra real estiver no PFP a virtual estará no PHP, e vice-versa. Vindo a luz do lado esquerdo, a sombra real fica à esquerda da virtual.

Utiliza-se aqui a direção luminosa convencional, indicada à esquerda, cujas projeções fazem 45° com o eixo x.



Sombras de pontos situados no 1º diedro

O ponto A situa-se no 1º octante, a sua sombra real projeta-se no PHP e a virtual no PFP. O ponto B situa-se no 2º octante, pelo que a sua sombra real surge no PFP e a virtual no PHP. O ponto C encontra-se no $\beta_{1/3}$, a sua sombra projeta-se no eixo x; neste caso considera-se apenas a sombra real e indica-se como mostrado na imagem.

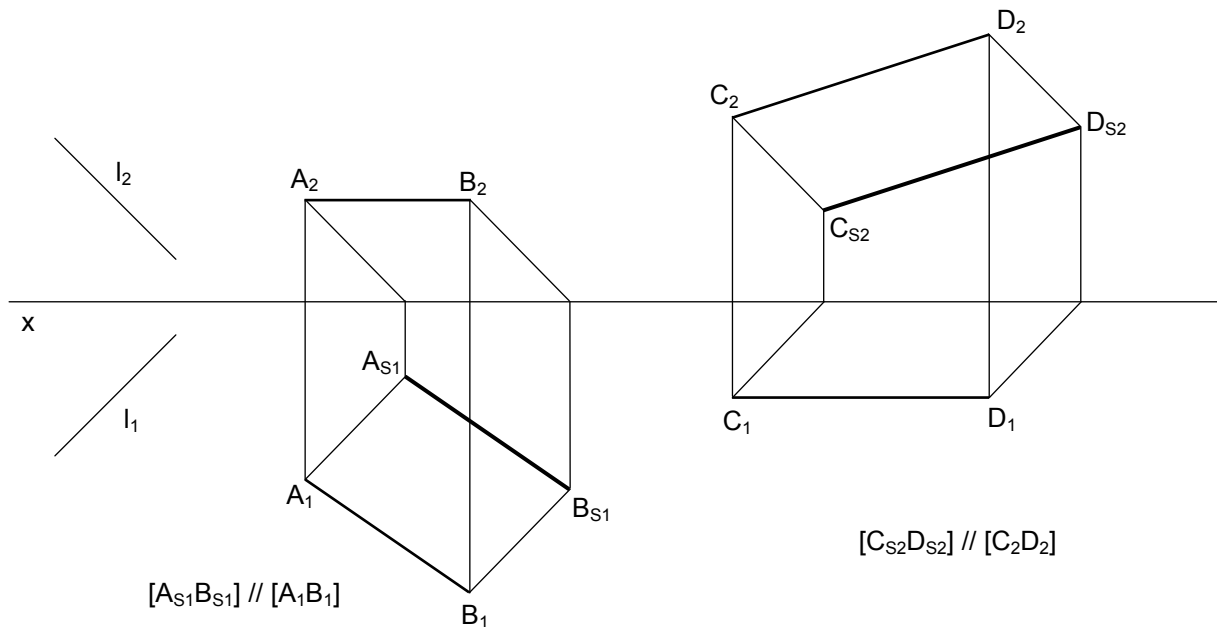


Sombras de pontos situados nos planos de projeção

Os pontos D e E situam-se em PFP e PHP, respetivamente; as suas sombras reais estão coincidentes com as suas projeções nesses planos. O ponto F situa-se no eixo x, pelo que a sua sombra coincide com as suas projeções.

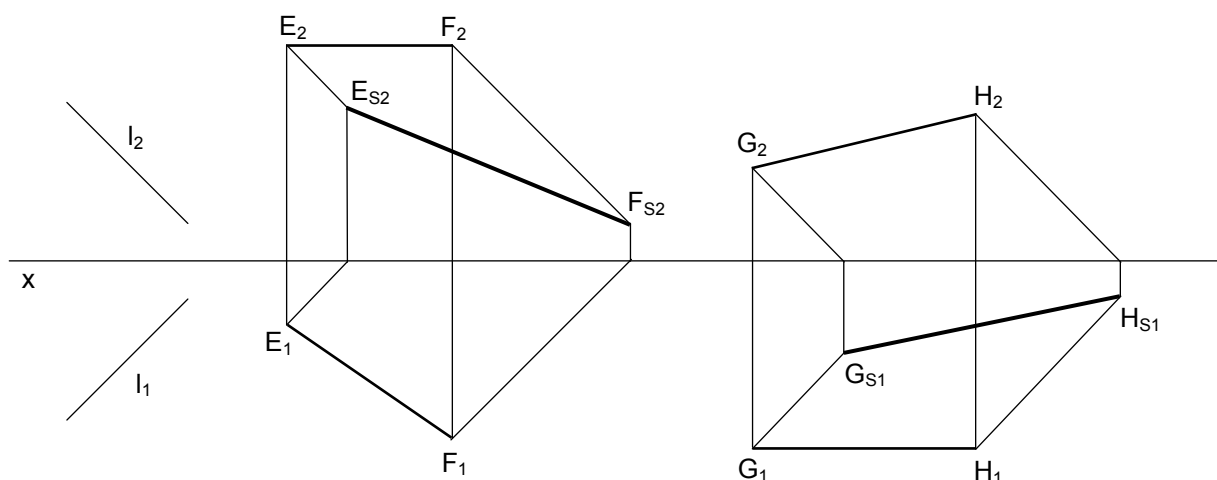
Sombras de segmentos de reta

Um segmento de reta pode projetar sombra apenas num plano de projeção ou em ambos. Nesta página vemos segmentos de reta horizontais e frontais que projetam sombra apenas sobre um plano de projeção.



Sombras de segmentos de reta horizontal e frontal totalmente projetadas no plano ao qual são paralelos

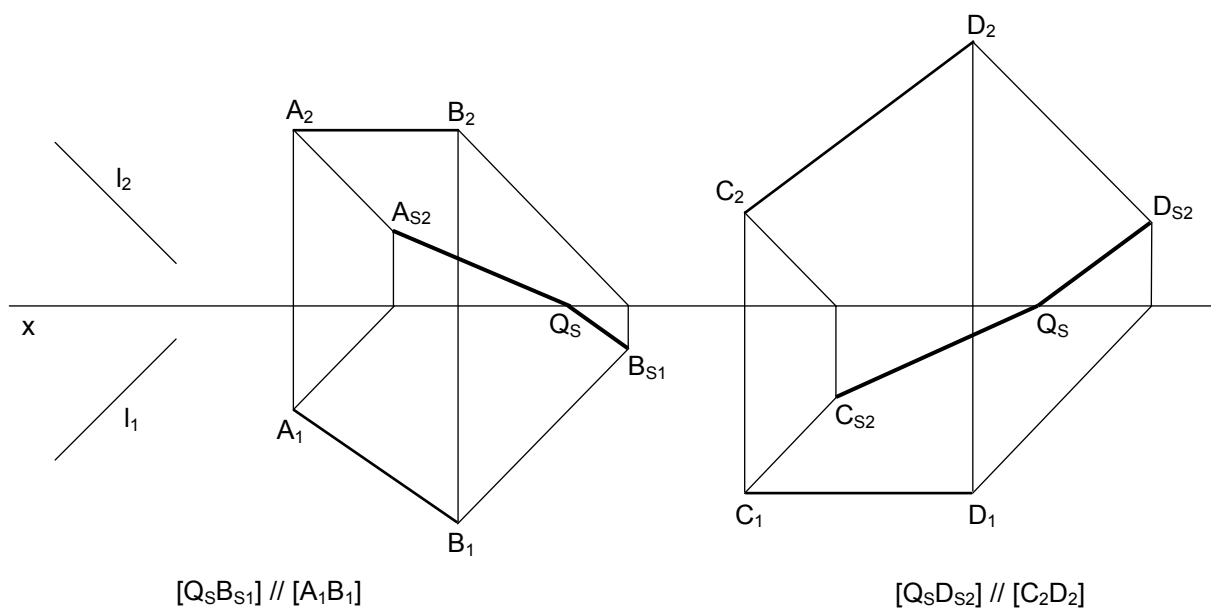
Os segmentos que se apresentam nesta imagem projetam sombra real apenas no plano de projeção que lhe é mais próximo. Isso acontece porque em ambos os casos os extremos dos segmentos têm uma das coordenadas maior do que a outra.



Sombras de segmentos de reta horizontal e frontal totalmente projetadas no plano ao qual não são paralelos

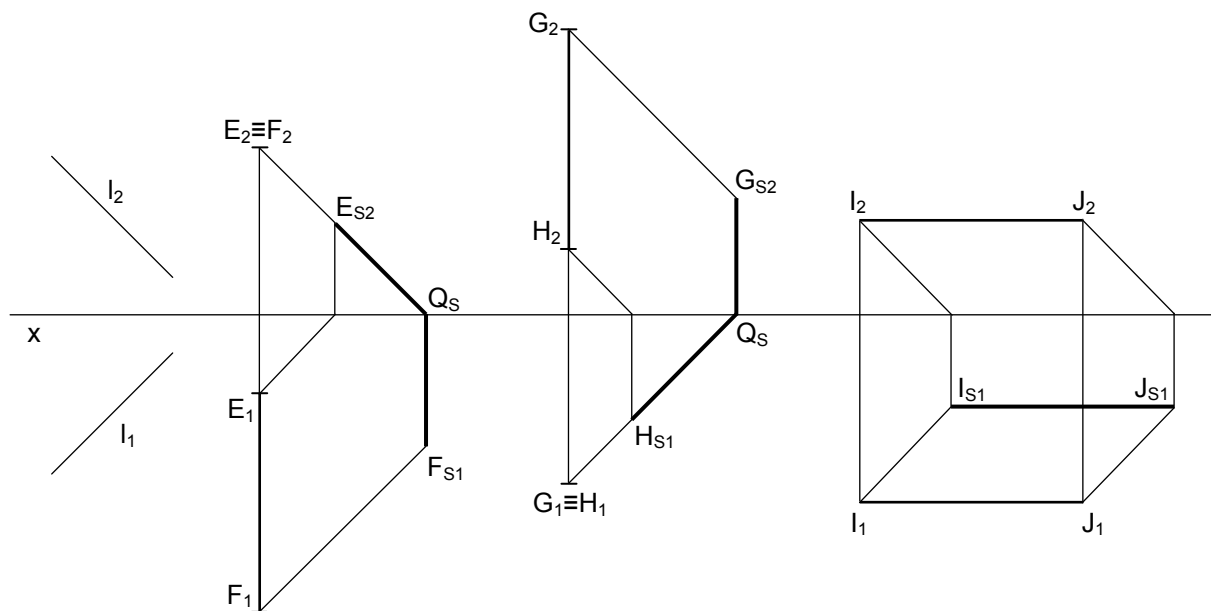
Nestas situações os segmentos projetam sombra no plano ao qual não são paralelos, uma vez que se encontram mais próximos desse plano. Comparando com a situação anterior, aqui a sombra do segmento não é paralela a nenhuma das suas projeções.

Aqui observam-se sobretudo situações em que o segmento de reta projeta sombra sobre os dois planos de projeção, pelo que existem pontos de quebra nessas situações.



Sombras de segmentos de reta horizontal e frontal projetadas em ambos os planos de projeção

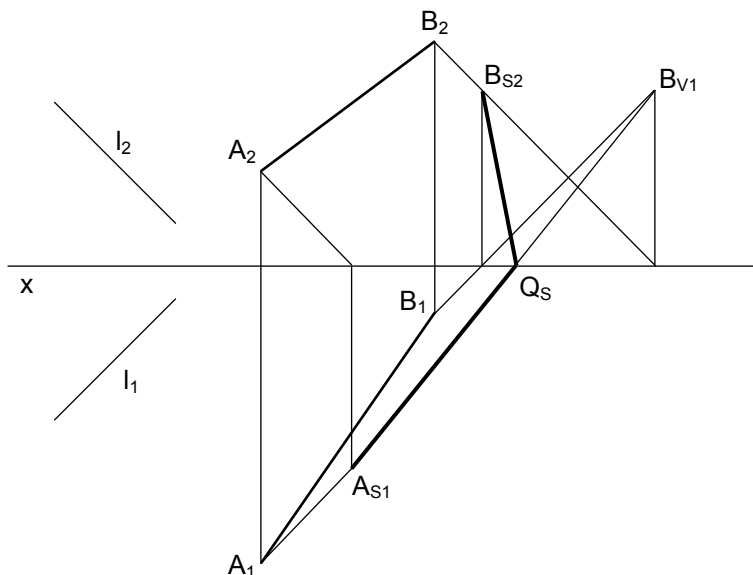
Quando as sombras se projetam em ambos os planos de projeção existe um ponto de quebra Q no eixo x, uma vez que a sombra não é contínua. Estes casos resolvem-se tirando proveito do facto de a sombra projetada no plano ao qual o segmento é paralelo ser também paralela à sua projeção nesse plano (comparar com as situações da página anterior e observar as indicações da legenda).



Sombras de segmentos de reta de topo, vertical e fronto-horizontal

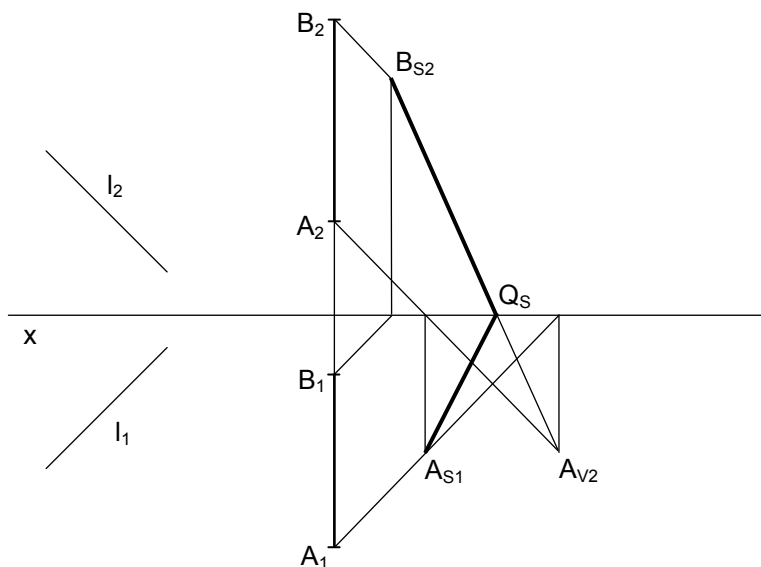
Quando as sombras dos segmentos de topo e verticais se projetam em ambos os planos de projeção, fazem sempre 45° e 90° com o eixo x, unidas pelo ponto de quebra, conforme mostram a imagem. A sombra do segmento fronto-horizontal é paralela ao eixo x.

Aqui veremos as sombras de segmentos de reta oblíquos aos planos de projeção, projetando sombra em ambos os planos. Nestes casos recorre-se às sombras virtuais de um dos extremos do segmento.



Sombra do segmento de reta oblíquo

O segmento oblíquo não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, por isso não existe paralelismo entre as suas sombras e as suas projeções. Neste caso cada extremo projeta sombra num plano diferente, por isso resolve-se recorrendo à sombra virtual de um dos extremos. Pode-se unir a sombra real de um ponto à sombra virtual de outro, pois situam-se no mesmo plano.

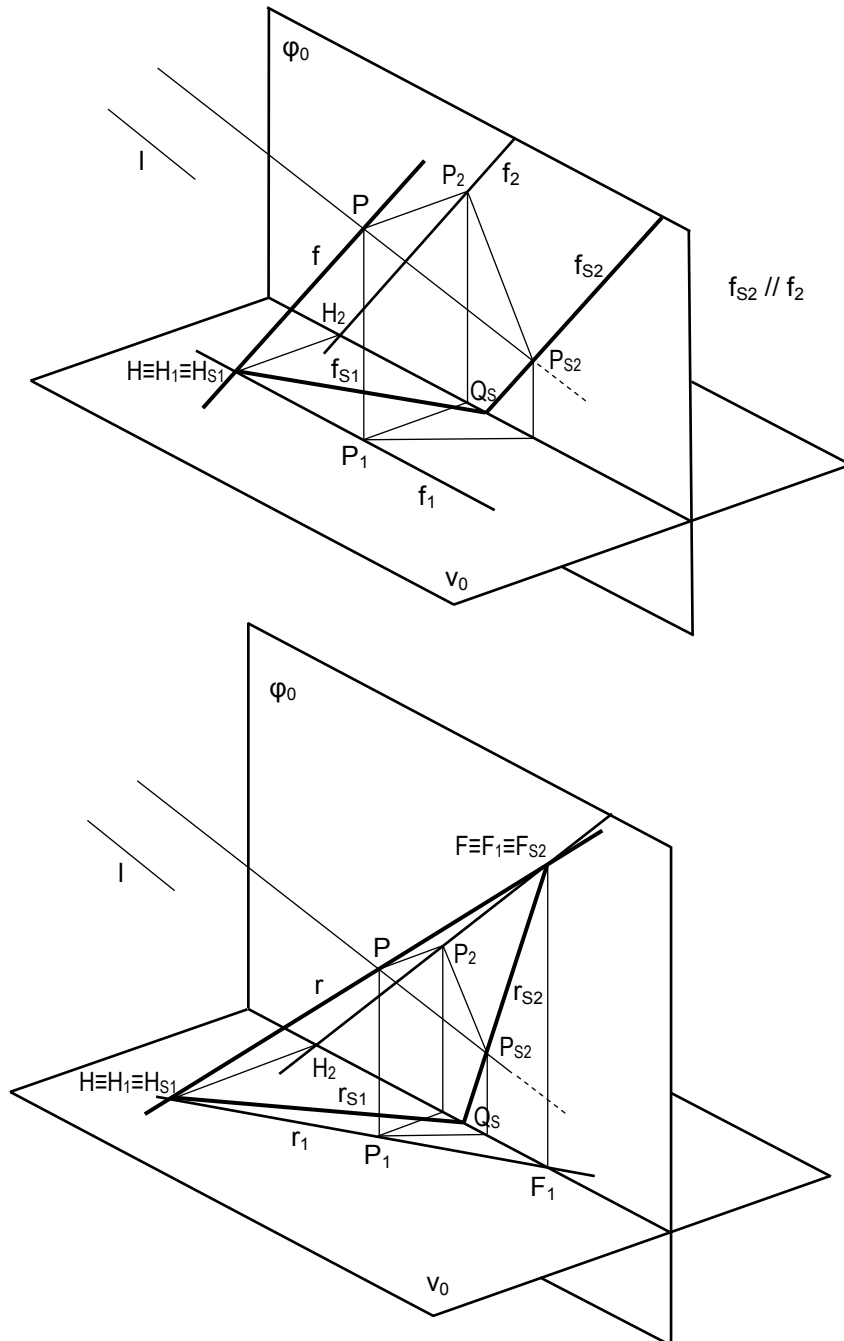


Sombra do segmento de reta de perfil

A determinação das sombras do segmento de perfil é igual à do oblíquo, havendo também necessidade de recorrer à sombra virtual de um dos seus extremos, seja ele qual for, sempre que as sombras dos seus extremos se situem em planos de projeção diferentes.

Sombras de retas no espaço

Aqui mostra-se como se processa a determinação das sombras de retas no espaço. Para o efeito utiliza-se uma reta com um só traço e outra com dois.



Sombras de retas sobre os planos de projeção

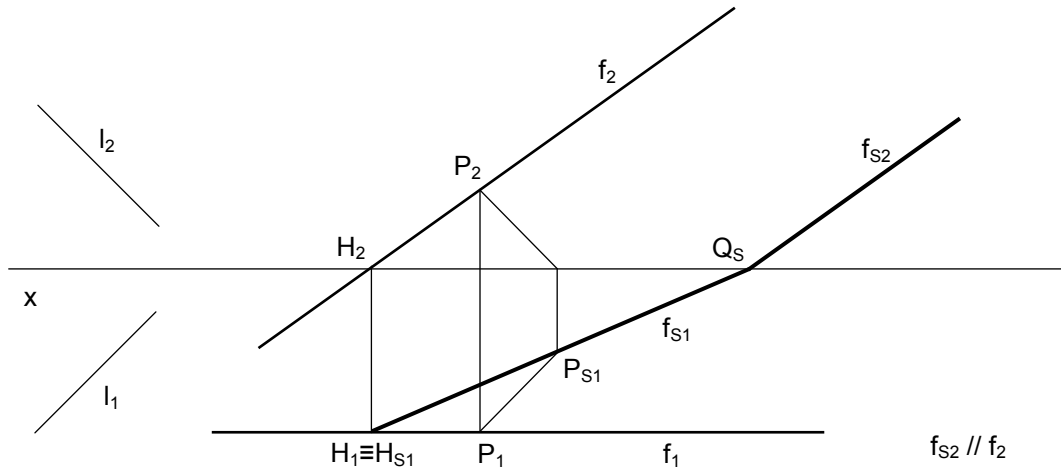
No primeiro caso temos uma reta frontal. Para determinar a sua sombra sobre os planos de projeção basta determinar a sombra real de um dos seus pontos e uni-la à sombra do traço da reta. De notar que uma reta paralela a um plano projeta, sobre esse plano, sombra paralela à própria reta.

Em baixo temos uma reta oblíqua. Para determinar a sua sombra determina-se também a sombra real de um dos seus pontos, que se une aos traços da reta, por fazerem sombra no próprio sítio onde se encontram.

Os pontos de quebra surgem naturalmente aquando da realização dos traçados referidos.

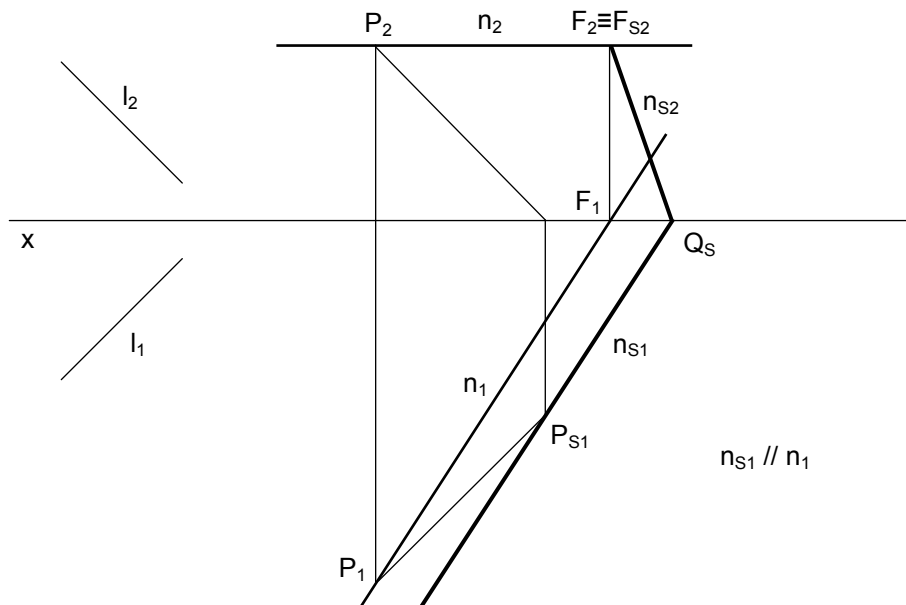
Sombras de retas paralelas aos planos de projeção

Normalmente utiliza-se um ponto auxiliar para determinar a sombra de uma reta. Nos exemplos que se seguem esse ponto é sempre designado por P. Qualquer ponto da reta situado no 1º diedro pode ser utilizado. Se não existir nenhum nessas circunstâncias há que o adicionar.



Sombra da reta frontal

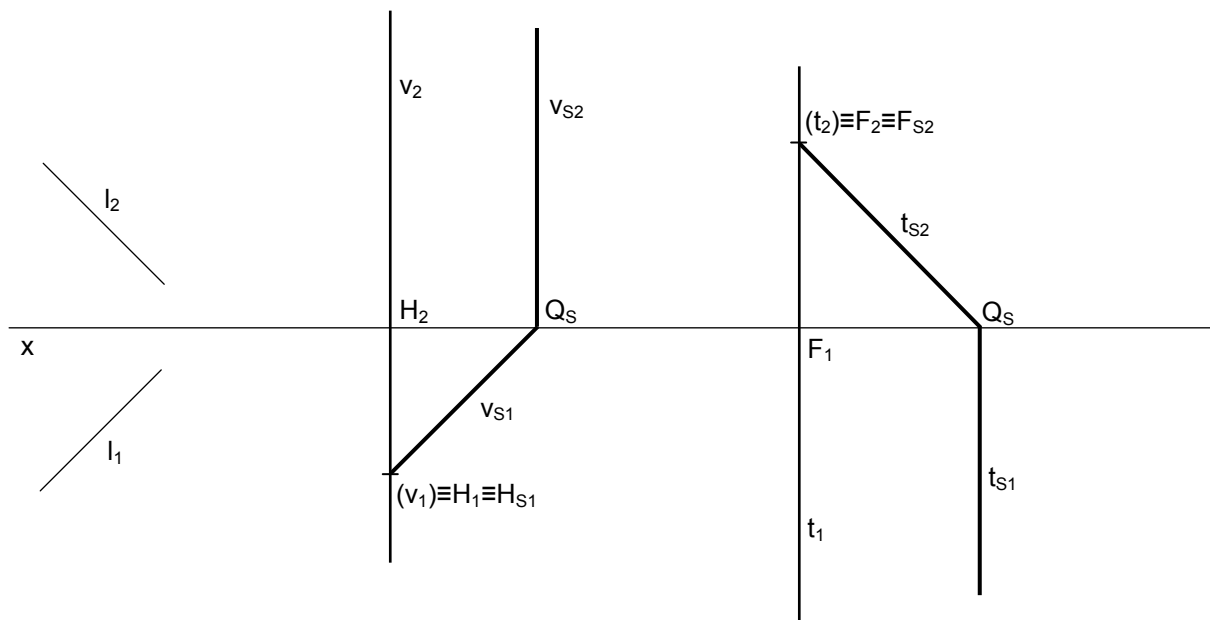
A sombra do ponto auxiliar P, unida à sombra do traço da reta, permitiu determinar a sombra da reta no PHP. A sombra no PVP é paralela à sua projeção nesse plano.



Sombra da reta horizontal

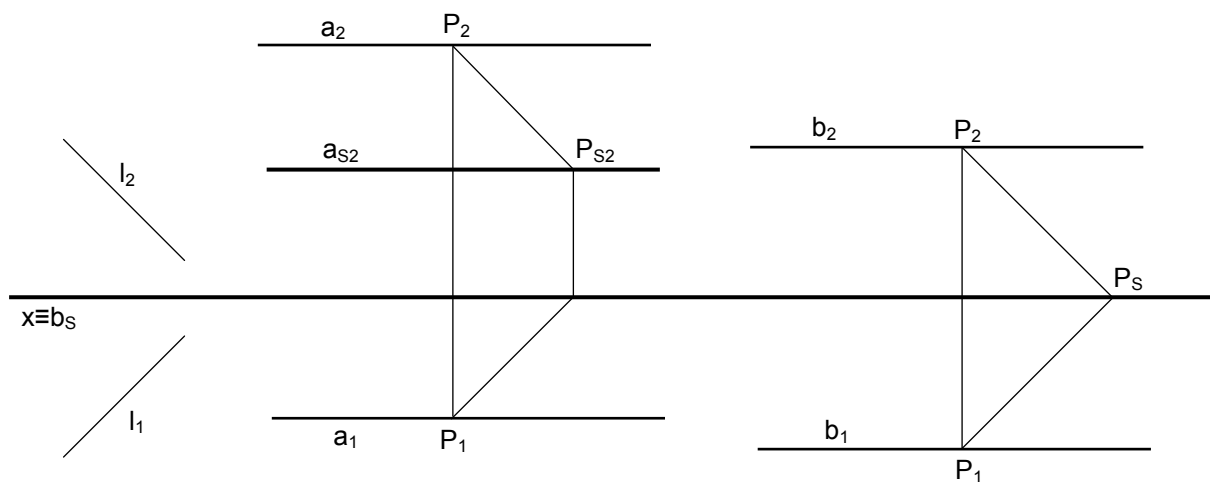
Aqui, a partir da sombra do ponto auxiliar P, traçou-se a sombra da reta no PHP, paralela à sua projeção horizontal. Unindo o ponto de quebra à sombra do traço da reta determina-se a sua sombra no PVP.

Nesta página estão expostas as retas cuja determinação da sombra é mais simples. Nas duas primeiras situações, essa determinação pode fazer-se diretamente, sem utilização de qualquer ponto auxiliar.



Sombras das retas vertical e de topo

As sombras destas retas podem ser determinadas diretamente, ou seja, sem a ajuda de qualquer ponto auxiliar. Isso é possível porque a sombra projetada num dos planos faz sempre 45° e a outra faz sempre 90° com o eixo x .

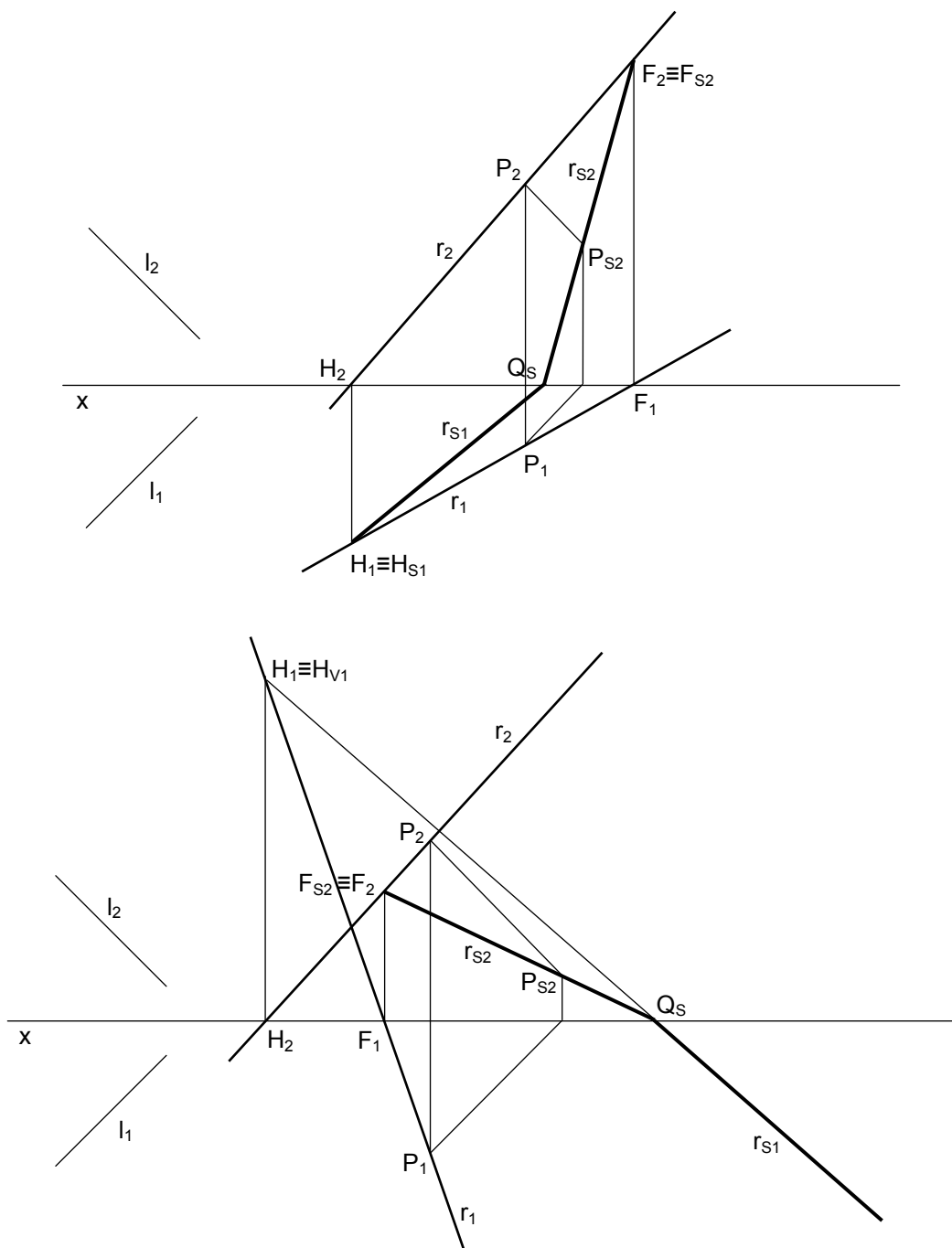


Sombra da reta fronto-horizontal

Uma reta fronto-horizontal faz sombra no plano de projeção que lhe está mais próximo. A reta a faz sombra no PHP, uma vez que tem menor afastamento do que cota. A reta b tem cota e afastamento iguais, pelo que a sua sombra se projeta no eixo x . Para determinar a sombra destas retas utiliza-se também um ponto auxiliar.

Sombras de retas oblíquas aos planos de projeção

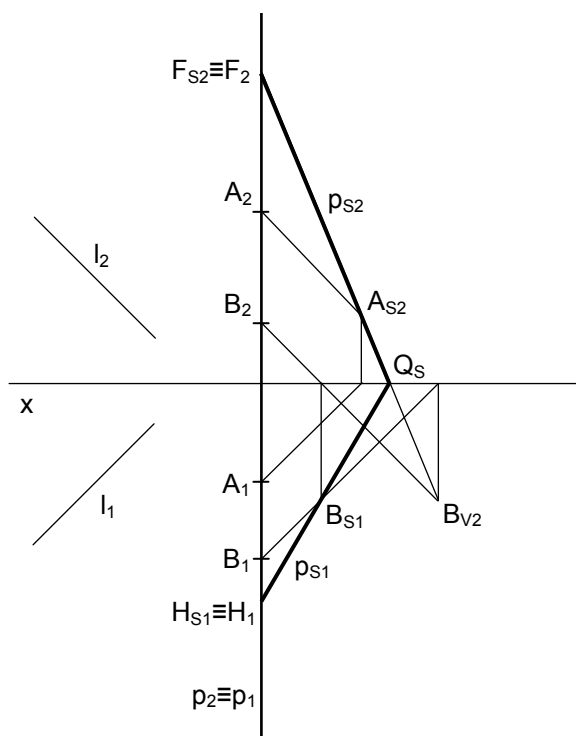
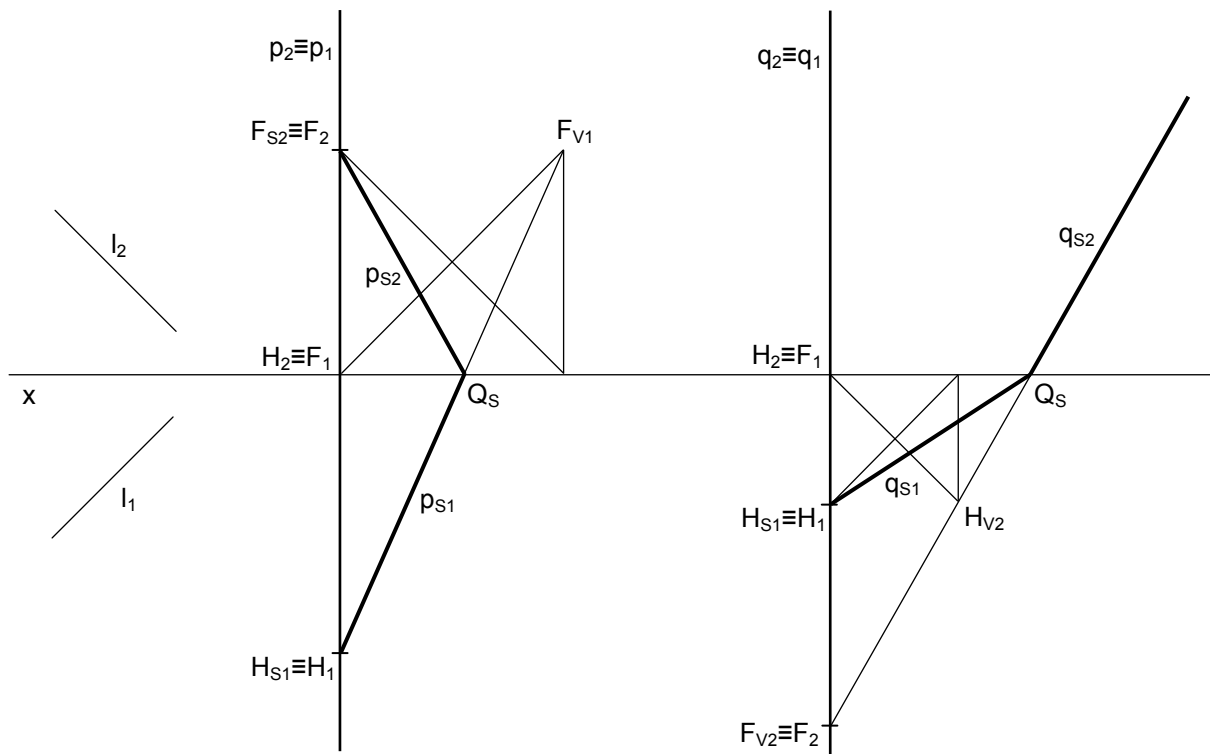
Para a determinação das sombras destas retas é fundamental a utilização de um ponto auxiliar, seja dado no enunciado ou não. As retas que aqui se apresentam têm os seus traços indicados à partida, no entanto isso pode não acontecer, pois elas podem ser definidas por outros dois pontos.



Sombras de retas oblíquas

Mostram-se aqui duas retas oblíquas. A primeira tem os traços frontal e horizontal com cota e afastamento positivos; a segunda tem traço horizontal com afastamento negativo. Nesta, o traço horizontal, por não receber luz, considera-se como estando em sombra virtual.

As retas de perfil que aqui se apresentam estão definidas pelos seus traços, no entanto podem ser definidas por outros pontos. Nos casos que aqui se mostram (por não ser possível marcar diretamente um ponto auxiliar numa reta de perfil) utiliza-se um dos seus traços como ponto auxiliar.



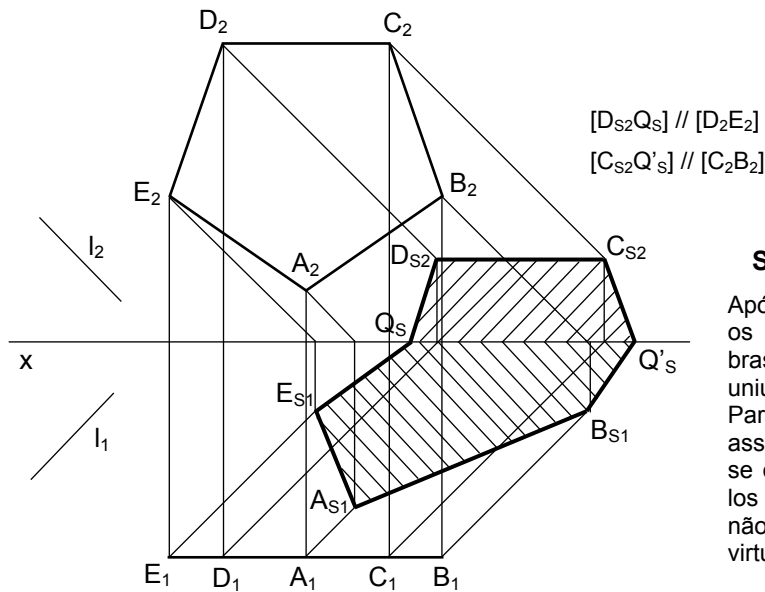
Sombras de retas de perfil

Em cima temos duas situações: na primeira os traços frontal e horizontal da reta têm cota e afastamento positivos; na segunda o traço horizontal tem afastamento positivo e o frontal tem cota negativa. Numa foi utilizado o traço frontal da reta como ponto auxiliar para determinar as sombras, noutra foi utilizado o traço horizontal. De notar que a sombra da reta da direita se prolonga infinitamente.

Ao lado temos uma reta definida por dois pontos que não os traços. Acha-se as sombras próprias e uma virtual desses pontos. No prolongamento das sombras da reta determinam-se os seus traços, antes desconhecidos.

Sombras de polígonos paralelos aos planos de projeção

Aqui mostra-se como se determinam sombras de polígonos paralelos aos planos de projeção. De notar que nestas situações não há necessidade de recorrer a sombras virtuais. A mancha de sombra projetada indica-se com tracejado fino, perpendicular às projeções dos raios de luz.

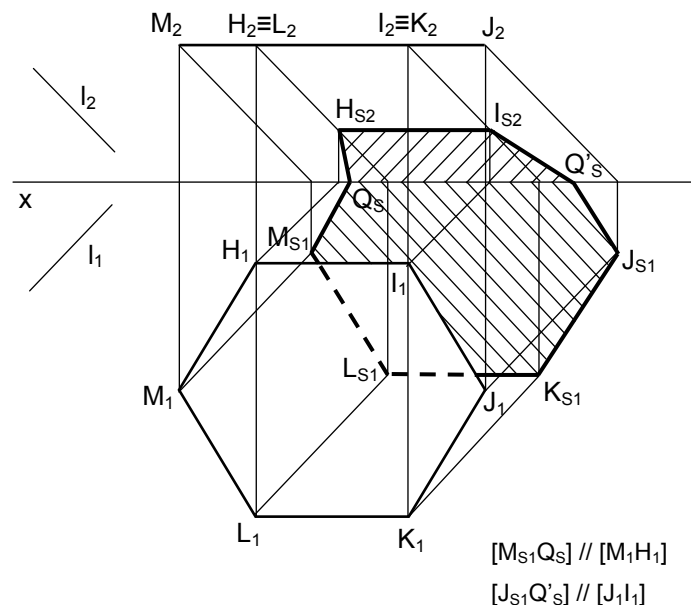


Sombras de um pentágono frontal

Após determinar as sombras reais de todos os vértices do polígono, unem-se as sombras situadas no mesmo plano de projeção; uniu-se D_{S2} com C_{S2} , E_{S1} com A_{S1} e com B_{S1} . Para determinar as restantes sombras, assim como os pontos de quebra, traçaram-se os segmentos $[D_{S2}Q_s]$ e $[C_{S2}Q'_s]$, paralelos respetivamente a $[D_2E_2]$ e a $[C_2B_2]$. Assim não há necessidade de recorrer a sombras virtuais.

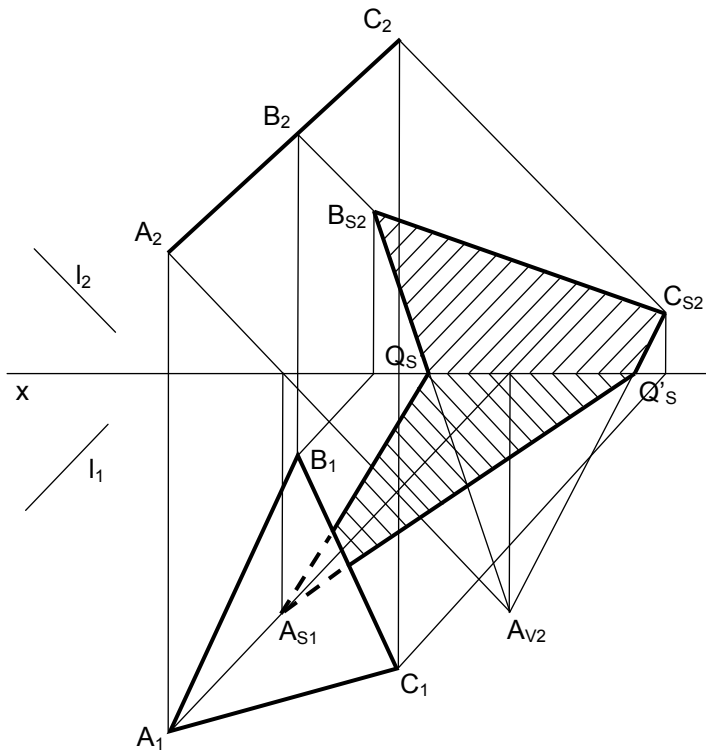
Sombras de um hexágono horizontal

Também aqui se determinaram primeiro as sombras reais dos vértices e se unem aqueles que se situam no mesmo plano de projeção. Para determinar as restantes sombras, assim como os pontos de quebra, traçaram-se os segmentos $[M_{S1}Q_s]$ e $[J_{S1}Q'_s]$, paralelos respetivamente a $[M_1H_1]$ e a $[J_1I_1]$. Deste modo não é preciso utilizar sombras virtuais. De notar que aqui uma parte da sombra projetada pelo polígono no PHP fica sob a sua projeção homónima, pelo que se representa a traço interrompido.



Sombras de polígonos não paralelos aos planos de projeção

Aqui determinam-se sombras de polígonos em posições onde não existe paralelismo a nenhum dos planos de projeção. Quando isso acontece há necessidade de recorrer a sombras virtuais para determinar os pontos de quebra.

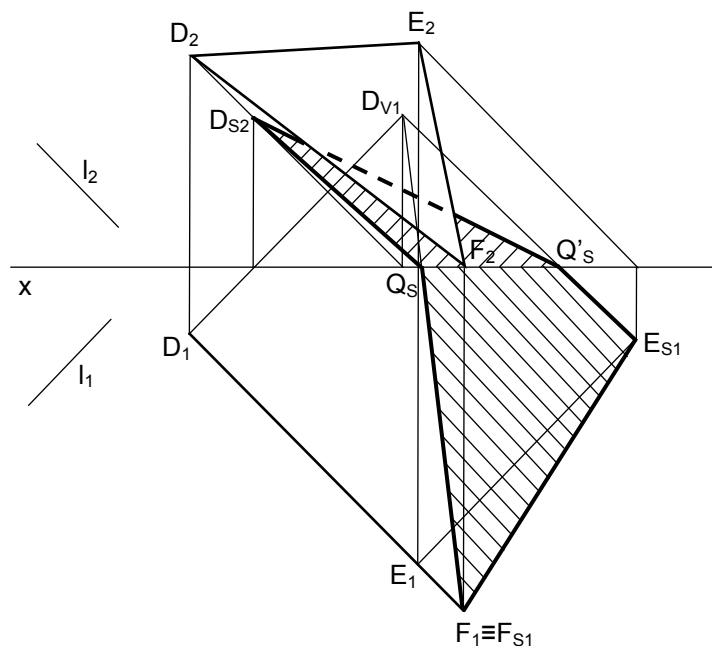


Sombras de um triângulo de topo

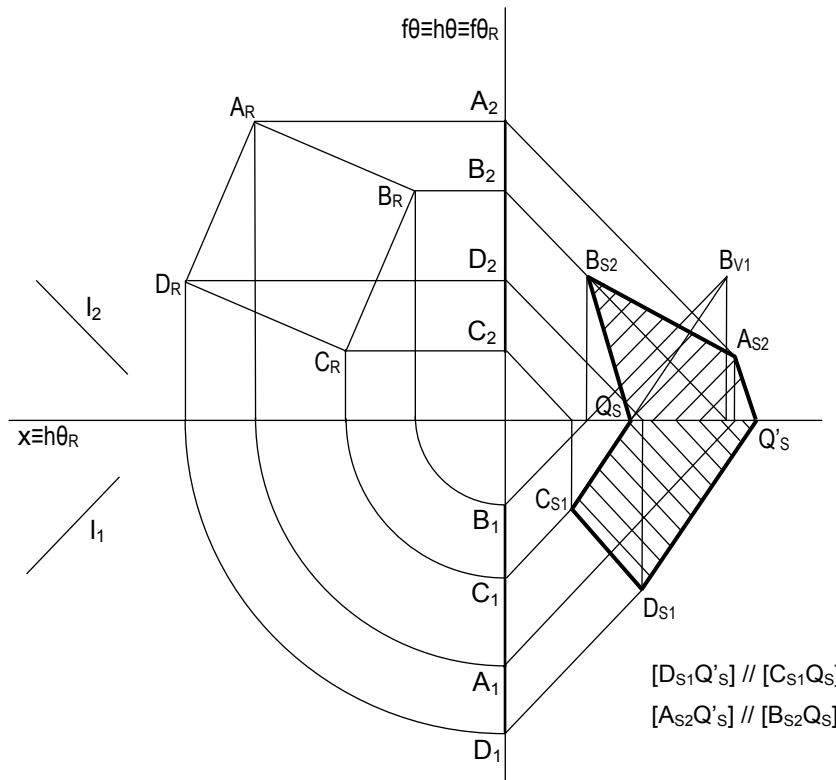
Após determinar as sombras reais de todos os vértices do polígono, uniram-se as sombras situadas no PFP. Para unir essas sombras à do vértice A optou-se pela determinação da sombra virtual desse ponto. Assim, determinaram-se também os pontos de quebra, que fazem a ligação à sombra real do ponto A, situada no PHP.

Sombras de um triângulo vertical

Aqui o triângulo tem um vértice no PHP, pelo que a sua sombra horizontal fica coincidente com a sua projeção homônima. De resto procede-se de modo idêntico ao do caso anterior, aqui com a determinação da sombra virtual do ponto D, com a qual se determinaram os pontos de quebra.



Observam-se aqui mais duas situações em que os polígonos não estão paralelos a nenhum dos planos de projeção. Nos casos em que se trata de um polígono regular, ou sujeito a condições específicas, é necessário recorrer a um rebatimento para o representar. É o que se passa na primeira situação. Isso é válido para o caso mostrado, como para outros que envolvam qualquer polígono que não seja paralelo a um plano de projeção.

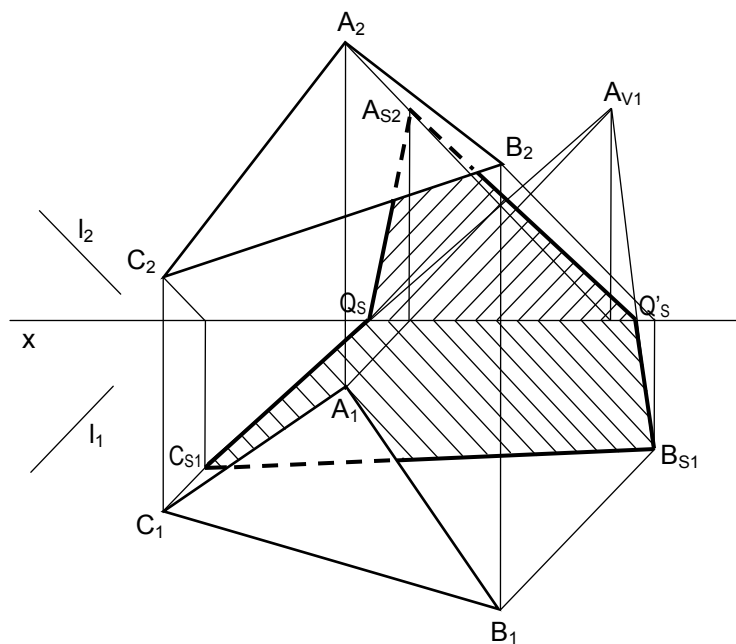


Sombras de um triângulo de perfil

Depois de unidas as sombras dos vértices B com A e as de C com D, determinou-se a sombra virtual de um dos pontos, B neste caso, o que permitiu determinar o ponto de quebra Q. Por se tratar de uma figura com os lados paralelos dois a dois, não é necessário determinar mais nenhuma sombra virtual, já que $[D_{S1}Q'_s]$ é paralelo a $[C_{S1}Q_s]$, assim como $[A_{S2}Q'_s]$ é paralelo a $[B_{S2}Q_s]$.

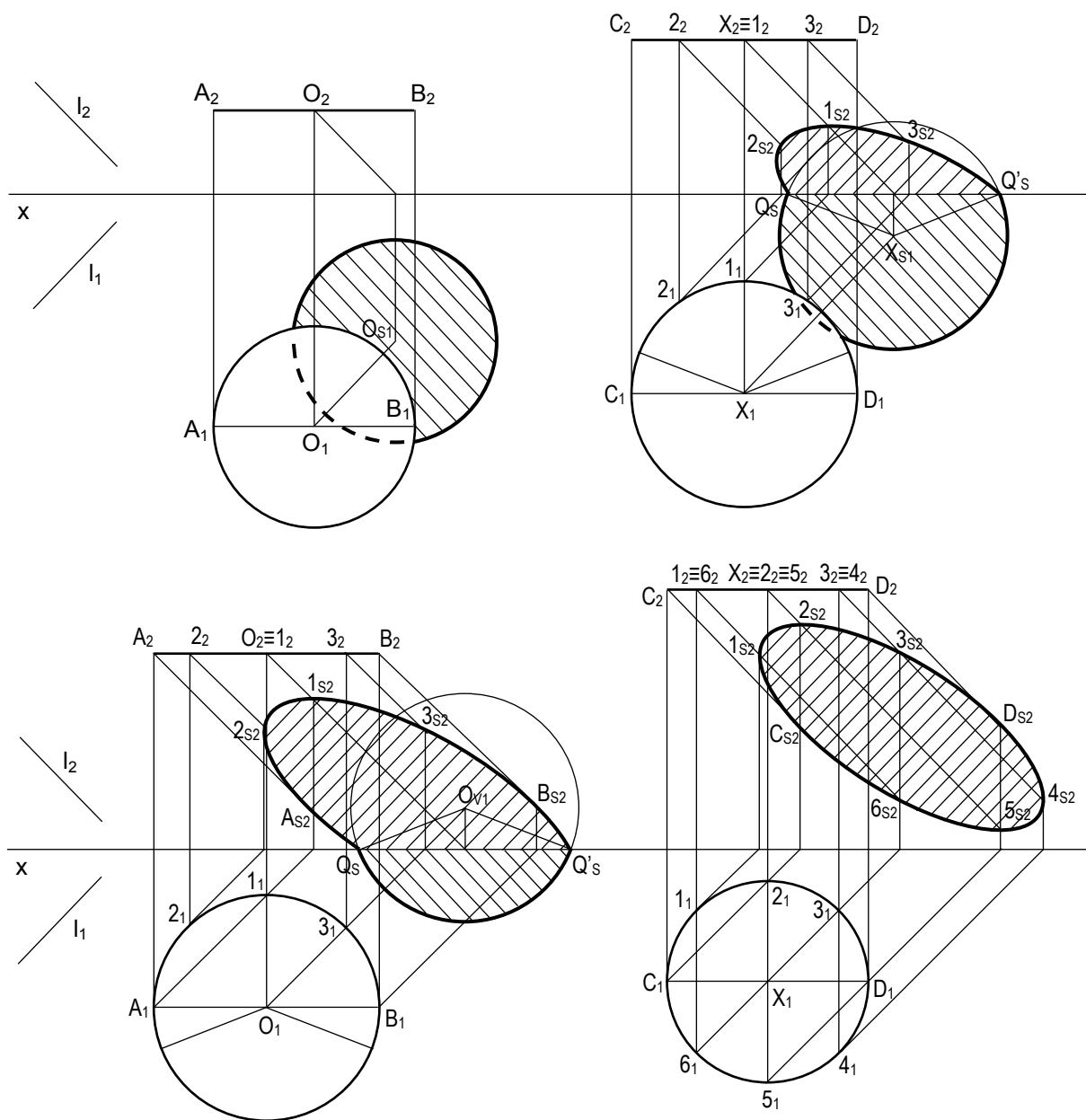
Sombras de um triângulo oblíquo

Unindo as sombras reais dos pontos C e B com a virtual do ponto A, obtém-se a sombra do triângulo no PHP. Através dos pontos de quebra determina-se a sombra do polígono no PFP. De notar que nesta situação existirem invisibilidades em ambas as projeções.



Sombras de circunferências paralelas aos planos de projeção

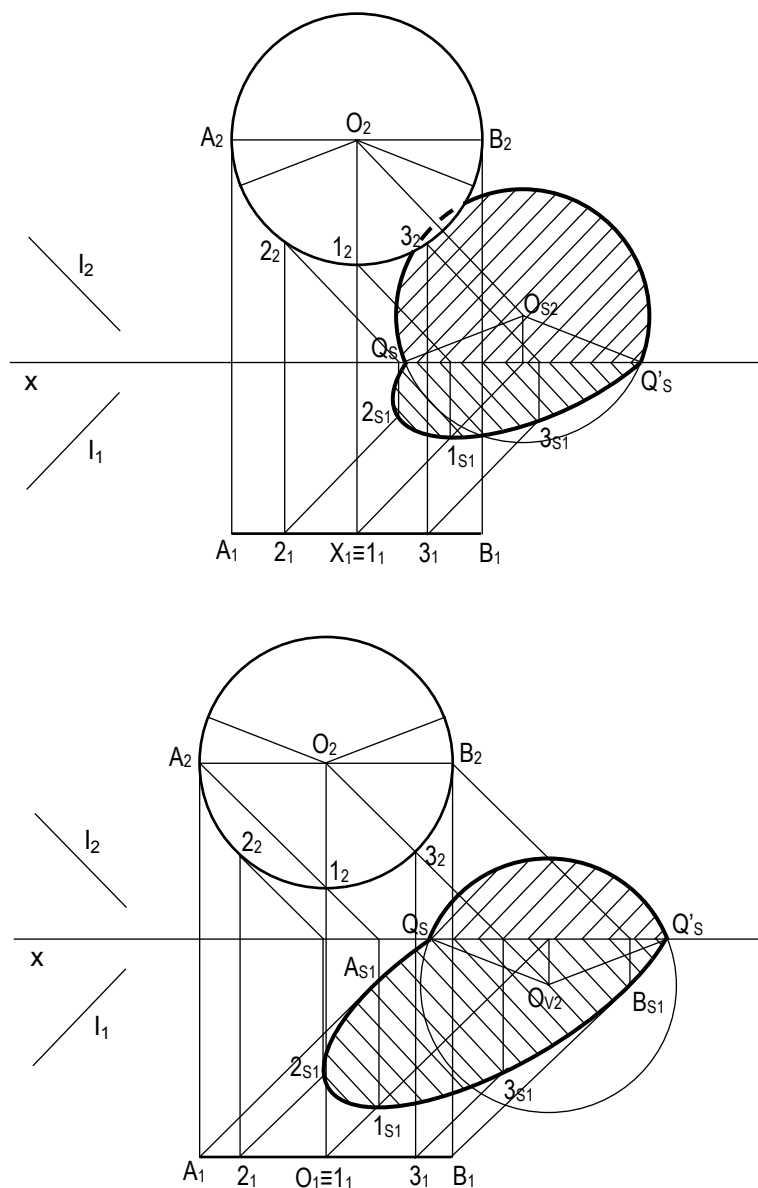
Nesta página mostra-se como se determina a sombra de quatro circunferências paralelas ao plano horizontal de projeção. Importa observar principalmente como as manchas de sombra variam conforme a relação que existe entre as medidas das cotas e dos afastamentos das circunferências.



Sombras de circunferências horizontais

Em cima, à esquerda, toda a sombra da circunferência se projeta no PHP; à direita, uma pequena parte projeta-se no PFP. Para a determinar usam-se os pontos 1, 2 e 3, situados no arco que se projeta nesse plano. Em baixo, à esquerda, mais de metade da sombra se projeta no PFP. Para a determinar usam-se os pontos 1, 2, 3, A e B, situados no arco que se projeta nesse plano. De notar que aqui o arco de circunferência é traçado com centro na sombra virtual de O, por esta se situar no PHP. À direita, toda a sombra se projeta no PFP, sendo utilizados oito pontos para determinar a elipse. De notar que nos casos em que existem pontos de quebra se traçam dois raios de circunferência na sombra projetada e na projeção da circunferência, uns paralelos aos outros, com o objetivo de averiguar qual a porção de arco da circunferência onde se marcam os pontos que permitem determinar a parte elíptica da sombra.

Aqui vemos situações idênticas às segunda e terceira da página anterior, mas envolvendo circunferências frontais.

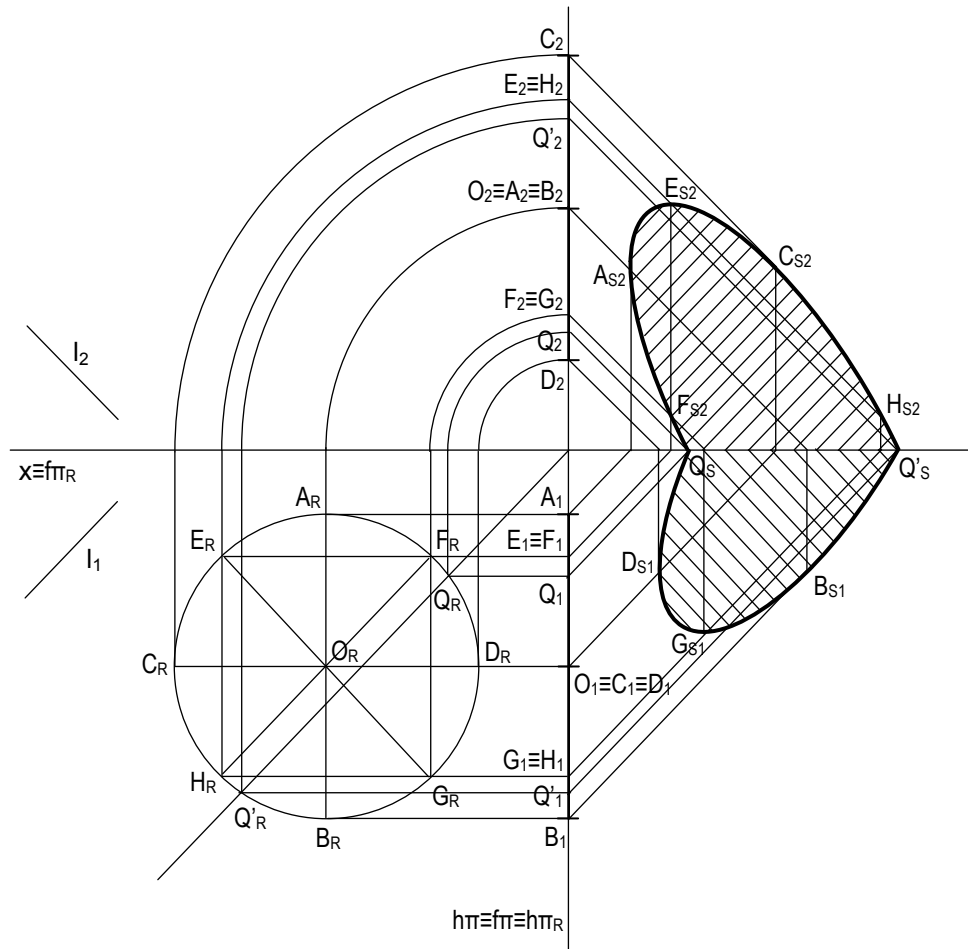


Sombras de circunferências frontais

Tanto num caso como noutro, começa-se por determinar as sombras das circunferências no PFP. Após isso, delimita-se o arco que corresponde à sombra virtual da circunferência, dentro do qual se escolhem os pontos a utilizar na determinação da sombra no PHP, três no primeiro caso, cinco no segundo, já que aqui falta determinar mais de metade da figura.

Sombras da circunferência de perfil

Aqui mostra-se como se determina a sombra de uma circunferência de perfil. Trata-se de um caso em que se recorre a um rebatimento auxiliar.



Sombras da circunferência de perfil

Para determinar as sombras da circunferência de perfil utilizam-se oito pontos, já que são ambos arcos de elipse. Os quatro pontos que limitam as projeções da figura são indicados diretamente, mas os restantes quatro são determinados com recurso ao rebatimento. É também no rebatimento que se determinam os pontos de quebra, utilizando uma linha que faz 45° com o eixo x e corta a circunferência rebatida.

Sombras I – Exercícios

Sombras de segmentos de reta e de retas

- Determinar as sombras dos segmentos de reta verticais que têm como extremos os pontos:
 - A(5;2;1) e B(5;2;4);
 - C(-1;3;0) e D(-1;3;4).
- Determinar as sombras dos segmentos de reta de topo que têm como extremos os pontos:
 - E(4;1;3) e F(4;5;3);
 - G(-2;2;1) e H(-2;5;1).
- Determinar as sombras dos segmentos de reta frontais que têm como extremos os pontos:
 - I(6;2;1) e J(3;2;4);
 - J(-1;2;5) e K(-3;2;0).
- Determinar as sombras dos segmentos de reta horizontais que têm como extremos os pontos:
 - L(2;1;4) e M(5;3;4);
 - N(-2;0;2) e O(4;4;2).
- Determinar as sombras dos segmentos de reta oblíquos que têm como extremos os pontos:
 - P(7;2;5) e Q(4;4;1);
 - R(-1;2;1) e S(-2;4;6).
- Determinar as sombras dos segmentos de reta de perfil que têm como extremos os pontos:
 - T(5;2;5) e U(5;4;1);
 - V(-1;1;2) e W(-1;5;4).
- Determinar a sombra da reta horizontal n, que contém A(3;2;3) e faz 50° ad.
- Determinar a sombra da reta horizontal m, que tem traço em F(-3;0;2) e faz 30° ae.
- Determinar a sombra da reta frontal f, que tem traço em H(4;3;0) e faz 55° ad.
- Determinar a sombra da reta frontal g, que contém B(0;4;2) e faz 70° ae.
- Determinar as sombras das retas verticais:
 - v, que contém C(4;2;3);
 - b, que tem traço em H(-2;2;0).
- Determinar as sombras das retas de topo:
 - t, com 4cm de abscissa e 2cm de cota.
 - d, que contém D(-1;3;3).
- Determinar a sombra da reta oblíqua r, cujos traços são H(3;4;0) e F(-1;0;6).
- Determinar a sombra da reta oblíqua s, que contém K(3;3;1) e L(1;4;6).
- Determinar as sombras das retas de perfil:
 - p, que contém M(6;1;4) e N(6;3;2);
 - q, cujos traços são H(-1;-5;0) e F(-1;0;2).

Sombras de polígonos

- Determinar a sombra do triângulo equilátero horizontal [ABC], com 6cm de lado. Conhecem-se A(5;0;2), sabe-se que [AC] é de topo e que B é o vértice de maior abscissa.
- Determinar a sombra do pentágono regular horizontal [ABCDE], inscrito numa circunferência com 3,5cm de raio e centro em O(3;4;4). O lado de menor afastamento é fronto-horizontal.
- Determinar a sombra do retângulo frontal [PQRS]. Conhecem-se P(2;4;0), sabe-se que o lado [PQ] mede 6cm e faz 55° ad e o lado [PS] mede 4cm.
- Determinar a sombra do hexágono regular frontal [ABCDEF], inscrito numa circunferência com 3cm de raio e centro em O(2;5;4). Dois dos seus lados são fronto-horizontais.
- Determinar a sombra do triângulo vertical cujos extremos são A(4;1;3), B(2;3;5;6) e C(1;?;1).
- Determinar a sombra do quadrado vertical [JKLM], sendo J(2;0;2) e K(0;4;0) dois vértices consecutivos.
- Determinar a sombra do triângulo de topo cujos extremos são P(4;0;1,5), Q(0;1;5) e R(2,5;6;?).
- Determinar a sombra do losango [ACBD], situado no plano de topo ω , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa e faz 65° ae. Os vértices A(4;1) e C(4;7) são os extremos da diagonal maior; a diagonal menor mede 5cm.
- Determinar a sombra do quadrilátero de perfil cujos extremos são E(4;0;4), F(4;2;6), G(4;3;1) e H(4;6;2).
- Determinar a sombra do quadrado de perfil [EFGH], sabendo que E(1;3;1) e G(1;6;7) são vértices opostos.
- Determinar a sombra do triângulo cujos vértices são R(4;3;2), S(1;0;4) e T(-1;5;1).
- Determinar a sombra do quadrado [ABCD], situado no plano oblíquo π , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abscissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45° ad e 50° ad, respetivamente. A(0;2,5) e B(4;0) são vértices consecutivos.
- Determinar a sombra do triângulo [KLM], situado no plano de rampa α , cujos traços têm 4cm de cota e 5cm de afastamento. Conhecem-se K(2;0;4) e L(-1;4;?) e sabe-se que [LM] mede 5cm e é perpendicular a [KL].

Sombras de circunferências

29. Determinar a sombra da circunferência frontal com 2cm de raio e centro em $O(4;1,5;4)$.
30. Determinar a sombra da circunferência frontal com 3cm de raio e centro em $Q(4;4;5)$.
31. Determinar a sombra da circunferência frontal com 3cm de raio e centro em $X(5;5;4)$.
32. Determinar a sombra da circunferência frontal com 2,5cm de raio e centro em $O(5;6;2,5)$.
33. Determinar a sombra da circunferência horizontal com 3cm de raio e centro em $Q(4;5;4)$.
34. Determinar a sombra da circunferência horizontal com 3cm de raio e centro em $X(4;3;4)$.
35. Determinar a sombra da circunferência de perfil com 3,5cm de raio e centro em $O(-1;6;5)$.
36. Determinar a sombra da circunferência de perfil com 3,5cm de raio e centro em $Q(0;3,5;5)$.
37. Determinar a sombra da circunferência de perfil com 3cm de raio e centro em $X(0;8;3)$.