COLÉGIO PAULO VI

Ficha de Avaliação

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos | 8.11.2011

12.º Ano de Escolaridade

Grupo I

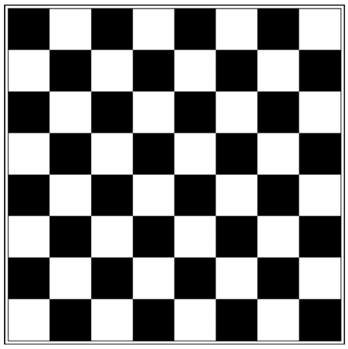
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

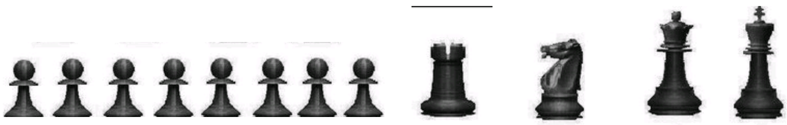
1. Colocaram-se numa urna 12 bolas, indistinguíveis pelo tato, numeradas de 1 a 12. Tirou-se uma bola da urna e verificou-se que o respetivo número era par. Essa bola não foi reposta na urna.
Tirando, ao acaso, outra bola da urna, a probabilidade desta bola ser par é:

(A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$

Resposta: (A)

2. Considere um tabuleiro de xadrez como o que está representado na figura ao lado.
Supondo que qualquer peça pode ocupar qualquer lugar, de quantas formas diferentes podemos dispor no tabuleiro oito peões brancos, uma torre, um cavalo, o rei e a rainha?





Notar que: os oito peões brancos são iguais entre si.

(A) $^{64}C_{12} \times 12!$

(B) $^{64}C_8 \times 8! \times {}^{58}C_4$

(C) $^{64}C_8 \times {}^{58}A_4$

(D) $^{64}A_8 \times {}^{58}C_4$

Resposta: (C)

3. No triângulo de Pascal considere a linha que contém os elementos da forma $^{2011}C_p$.

Quantos elementos dessa linha são menores que $^{2011}C_3$?

(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) 2

Resposta (A)

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \quad e \quad B \subset \Omega)$.

Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$ e $P(A \cap B) = 0{,}25$.

Então pode afirmar-se que:

(A) $P(\overline{A}) = 0{,}6$

(B) $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}06$

(C) $P(A / B) = \frac{2}{3}$

(D) $P(B / A) = \frac{5}{6}$

Resposta: (D)

5. No sistema decimal, quantos números de quatro algarismos diferentes existem entre 1000 e 4600?

(A) 3600 (B) 2325 (C) 1792 (D) 3014

Resposta: (C)

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Considere o seguinte problema:

"Lançam-se dois dados equilibrados e somam-se os pontos apresentados nas faces viradas para cima. O jogador ganha se a soma dos pontos é múltipla de 3.

Qual é a probabilidade de o jogador ganhar?"

A resposta dada por um aluno foi a seguinte:

"Os resultados, ou seja, somas, que podem ocorrer são 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

Há, portanto, 11 casos possíveis.

Os casos favoráveis, à soma ser múltipla de 3, são quatro: 3, 6, 9 e 12.

Logo, a probabilidade de o jogador ganhar o jogo é $\frac{4}{11}$*.”*

Acha que o aluno respondeu corretamente? Porquê?

O aluno não respondeu corretamente pois os elementos do espaço amostral que considerou não são equiprováveis (a soma 2 ocorre uma só vez, (1,1), mas a soma 3 já ocorre duas vezes, (1,2) e (2,1)) e portanto não se pode aplicar a Lei de Laplace.

2. Numa turma do 12º ano, $\frac{3}{5}$ dos alunos são do sexo feminino.

Sabe-se ainda que 10% das alunas pretendem tirar um curso de Engenharia, enquanto que, dos rapazes, essa percentagem é o dobro.

2.1 Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

2.1.1 Determine a probabilidade de esse aluno:

a) pretender tirar um curso de Engenharia sabendo que é do sexo feminino.

$P(E/M)=0{,}1$

b) ser um rapaz que pretende tirar um curso de Engenharia;

$P(H\cap E)=P(E/H)\times P(H)=0{,}2\times\frac{2}{5}=0{,}08$

c) pretender tirar um curso de Engenharia.

$P(E)=P(E/H)\times P(H)+P(E/M)\times P(M)=0{,}08+0{,}1\times\frac{3}{5}=0{,}14$

2.1.2 Considere os acontecimentos H e E, seguintes.

M:” o aluno escolhido ser uma rapariga”

E:”o aluno escolhido pretender tirar um curso de Engenharia”

Averigue se são, ou não, acontecimentos independentes.

Os acontecimentos não são independentes uma vez que:

$P(E/M)=0{,}1$ e $P(E)=0{,}14$ logo $P(E/M)\neq P(E)$

Ou

$P(E)=0{,}14$; $P(M)=\frac{3}{5}$ e $P(E\cap M)=0{,}1\times\frac{3}{5}=0{,}06$

Logo $P(E\cap M)\neq P(E)\times P(M)$

2.2 Suponha agora que essa turma tem **30 alunos**.

Os alunos pretendem organizar uma viagem de finalistas e para isso vão eleger uma comissão de **cinco** elementos, que irá tratar de todos os pormenores. Para que todos saibam quais as suas funções, decidiram que essa comissão teria que ter um presidente, um tesoureiro e um secretário e que os restantes dois elementos seriam apenas de apoio.

A Maria, que é a delegada, sugeriu também que as comissões deviam ser mistas, isto é, tinham que ter pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga.

2.2.1 Prove que, **nestas condições**, é possível formar, 7988760 comissões.

N.º de comissões: $$^{30}A_3 \times {}^{27}C_2 - {}^{18}A_3 \times {}^{15}C_2 - {}^{12}A_3 \times {}^{9}C_2 =$$
$$= 24360 \times 351 - 4896 \times 105 - 1320 \times 36 =$$
$$= 7988760$$

2.2.2 Supondo que a escolha da comissão é feita ao acaso, qual é a probabilidade de a Maria ser a presidente da comissão e o Bernardo, que é muito distraído, não fazer parte dela?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

$$P(A) = \frac{^{28}A_2 \times {}^{26}C_2 - {}^{17}A_2 \times {}^{15}C_2}{7988760} = \frac{217140}{7988760} \approx 0{,}03$$

2.2.3 Suponha que já foi escolhida uma comissão que, curiosamente, é constituída por cinco alunos de diferentes alturas. Essa comissão vai posar para uma fotografia.

Sejam A e B os acontecimentos:

A:" o aluno mais alto fica no extremo direito"

B:" os alunos dispõe-se por ordem crescente das suas alturas, da esquerda para a direita"

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(B/A)$ e, numa pequena composição (cinco a dez linhas), justifique a sua resposta.

Nota: comece por indicar o significado de $P(B/A)$, no contexto da situação descrita.

$P(B/A)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

Têm que explicar:

- Interpretação: $P(B/A)$ é a probabilidade de se disporem por ordem crescente das suas alturas, da esquerda para a direita, sabendo que o aluno mais alto fica no extremo direito.

- n.º de casos possíveis;

- n.º de casos favoráveis;

- Lei de Laplace

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sabe-se que Ω é um conjunto finito e que todos os acontecimentos elementares são equiprováveis. Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \quad e \quad B \subset \Omega)$ tais que:

$$P(A \cup B)=\frac{1}{3} \ \wedge \ P(A \cap B)=\frac{2}{3}P(A) \ \wedge \ P(B)\times P(\overline{B})=\frac{3}{16}.$$

Prove que os acontecimentos A e B têm o mesmo número de elementos.

$$P(B)\times P(\overline{B})=\frac{3}{16} \Leftrightarrow P(B)\times[1-P(B)]=\frac{3}{16} \Leftrightarrow P(B)-[P(B)]^2=\frac{3}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -16[P(B)]^2+16P(B)-3=0 \Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{4} \vee P(B)=\frac{3}{4}$$

Se $P(B)=\frac{3}{4}$:

$P(A \cup B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A)+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}P(A)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A)=-\frac{5}{4}$ o que é impossível.

Então $P(B)=\frac{1}{4}$ e $P(A \cup B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A)+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}P(A)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{4}$

Como os acontecimentos elementares são equiprováveis (e Ω é um conjunto finito), se A e B têm a mesma probabilidade então têm o mesmo n.º de elementos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ……………………………..(5 x 10 pontos) ……………… **50 pontos**

Grupo II……………………………………………………………150 pontos

1. ………………………………………………………… 15 pontos
2. ………………………………………………………… 115 pontos

2.1 …………………………………………………65 pontos

2.1.1 ……………………………… 45 pontos

a) ………………........ 15 pontos

b)………………….. 15 pontos

c)………………….. 15 pontos

2.1.2 ……………………………… 20 pontos

2.2 …………………………………………………50 pontos

2.2.1 ……………………………… 15 pontos

2.2.2 ……………………………… 15 pontos

2.2.3……………………………… 20 pontos

3. ………………………………………………………… 20 pontos

Total ………………………………………………………………… **200 pontos**